Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗА

Утверждено издательско-библиотечным
советом университета в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2011

Методы экономических расчетов и анализа : учеб. пособие / сост. И. А. Гусева. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. – 120 с.

В учебном пособии, написанном к одноименному курсу, рассматриваются методы финансово-экономических расчетов и анализа различных операций: начисления простых и сложных процентов, погашения долга, наращения с конверсией валюты, дисконтирования, учета векселей. Изложены основы денежных потоков, вычислительные процедуры для оценки аннуитетов, шести функций сложных процентов, с которыми сталкиваются банкиры, финансисты, экономисты, аналитики, оценщики и т. п. Материал представлен в форме теоретического изложения и практических заданий.

Для обучения бакалавров различных профилей направления 080200.62 «Менеджмент» всех форм обучения.

1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.1. Проценты и виды процентных ставок

Под ***процентами***, или ***процентными деньгами***, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: выдачи ссуды, продажи товара в кредит, помещения денег на депозитный счет, учета векселя, покупки сберегательного сертификата или облигации и т. д.

В договоре, заключенном между кредитором и заемщиком, всегда указывается размер процентной ставки.

Под ***процентной ставкой*** понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени, т. е. отношение процентных денег к сумме долга за единицу времени.

Процентная ставка измеряется в процентах. В расчетах при подстановке в формулы процентную ставку необходимо перевести в десятичную дробь. Например, если процентная ставка равна 18 %, то в расчетах используют дробь 0,18.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют ***периодом начисления.*** В качестве периода начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц и день.

Проценты различаются по базе для их начисления. Принимается постоянная или последовательно изменяющаяся база для расчета.

Простые проценты – это проценты, которые начисляются на постоянную базу, т. е. неизменную во времени.

При использовании сложных процентов база для их начисления постоянно изменяется во времени.

Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов называют ***наращением*** этой суммы.

Проценты могут, согласно договоренности между кредитором и заемщиком, выплачиваться по мере их начисления или присоединяться к основной сумме долга (***капитализация процентов***).

В финансово-экономическом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле – как ***измеритель степени доходности (эффективности)*** любой финансово-экономической, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности.

Существуют два принципа расчетов процентов:

- наращение на сумму долга **(декурсивные проценты)**, где применяют ставку наращения ***i*** *(interest base rate)*;
- скидка с конечной суммы задолженности **(антисипативные про-**

центы), где применяют учетную ставку ***d*** *(discount base rate).*

Декурсивные проценты называют просто процентами.

Процентные ставки могут быть «фиксированными» или «плавающими». В последнем случае фиксируется не сама ставка, а изменяющаяся во времени база («базовая ставка») и размер надбавки к ней – ***маржи***.

Примерами базовых ставок могут служить:

– ***LIBOR*** *(London inter-bank offered rate)* – Лондонская межбанковская процентная ставка;

– ***FIBOR*** – Франкфуртская межбанковская ставка;

– ***MIBOR*** – Московская базовая ставка по рублевым кредитам**,** рассчитываемая как средняя от заявленных коммерческими банками ставок привлечения и предоставления межбанковских кредитов.

Под ***маржей*** *(margin)* понимают разницу между процентной ставкой, уплачиваемой банком за кредитные ресурсы, и процентной ставкой, взимаемой с заемщика. Размер маржи может быть постоянным на протяжении срока ссудной операции или переменным, что зависит от ряда условий:

– кредитоспособности заемщика;

– срока кредита;

– кредитной истории заемщика и т. д.

Фиксированные процентные ставки могут быть постоянными или переменными. В банковском договоре указывается размер процентной ставки и условия ее изменения во времени.

Значительное место в системе процентных ставок занимает ***ставка рефинансирования*** – ставка, по которой Центральный банк России выдает кредиты коммерческим банкам.

В практических расчетах применяются так называемые ***дискретные проценты****,* т. е. проценты, начисляемые за фиксированные в договоре интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). В этом случае время рассматривается как дискретная переменная.

В аналитических расчетах, когда наращение производится за бесконечно малые промежутки времени, процентная ставка может рассматриваться как непрерывная переменная

1.2. Наращение по простой процентной ставке

Первоначальную сумму долга (ссуды, депозита и т. д.) с начисленными процентами к концу срока, называют ***наращённой суммой***.

Для записи формулы наращения простых процентов (*simple interest*) примем обозначения:

P – первоначальная сумма долга;

i – годовая процентная ставка (ставка наращения), выраженная десятичной дробью;

n – срок ссуды в годах;

I – проценты за весь срок ссуды;

S – наращённая сумма в конце срока.

Начисленные за весь срок проценты определяются как

$$I = P \cdot n \cdot i. \tag{1}$$

Наращенная сумма находится как сумма первоначального долга и начисленных процентов:

$$S = P + I = P(1 + n \cdot i).$$

Таким образом, получим ***формулу наращения по простым процентам***:

$$S = P(1 + n \cdot i). \tag{2}$$

В формуле (2) выражение в скобках представляет собой множитель наращения (*accumulation factor*) по простым процентам:

$$MH = 1 + n \cdot i. \tag{3}$$

Множитель наращения показывает, во сколько раз наращённая сумма больше первоначальной суммы долга. Таким образом, наращённая сумма определяется умножением первоначальной суммы долга на множитель наращения.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.

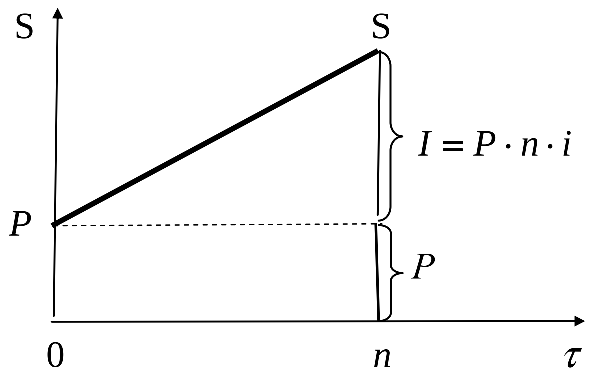


Рис.1. График роста по простым процентам

П р и м е р

Ссуда размером 200 тыс. р. выдана на 2 года по ставке i = 15 %. Определить наращённую сумму и величину начисленных процентов.

Наращённая сумма рассчитывается по формуле (2):

$$S = P(1 + n \cdot i) = 200(1 + 2 \cdot 0{,}15) = 260 \ \textit{тыс. р.}$$

Начисленные проценты находим как разность наращенной суммы и первоначальной суммы долга

$$I = S - P = 260 \ \textit{тыс. р.} - 200 \ \textit{тыс. р.} = 60 \ \textit{тыс. р.}$$

1.3. Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд

Обычно простые проценты применяют при выдаче краткосрочных ссуд или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору.

Если срок ссуды исчисляется в месяцах, то для проведения расчетов его нужно выразить в годах:

$$n = \frac{количество\ \ месяцев\ \ финансовой\ \ операции}{12}. \qquad (4)$$

Например, при сроках финансовой операции:

3 месяца – n = 0,25 года;

6 месяцев – n = 0,5 года;

9 месяцев – n = 0,75 года.

Если срок ссуды определен в днях, то общий срок ссуды в годах выражается в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K}, \qquad (5)$$

где t – число дней ссуды; K – число дней в году (***временная база*** – *time basis*).

При расчете простых процентов получают:

– ***обыкновенные***, или коммерческие, проценты (*ordinary interest*), если ***K = 360 дней*** (12 месяцев по 30 дней);

– ***точные*** (*exact interest*), если ***K* =365, 366 *дней*** при использовании действительной продолжительности года.

На практике применяются три способа расчета простых процентов:

- первый способ – ***точные проценты с точным числом дней ссуды.***

Обозначается как 365/365 или АСТ/АСТ. Обозначение идет от английского слова ***actual*** – действительный (АСТ). Этот способ применяется центральными банками разных стран и крупными коммерческими банками, например в Великобритании, США, Португалии и в других странах;

- второй способ – ***обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.***

Обозначаются как 365/360 или АСТ/360. Этот метод иногда называют ***банковским***, он распространен в ссудных операциях коммерческих банков Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии, Югославии. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Так при числе дней ссуды, превышающем 360, сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой. Например, при t = 364, n = 364/360 = 1,011;

- третий способ – ***обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.***

Обозначается как 360/360. Применяется тогда, когда не требуется большой точности, например, в промежуточных расчетах. Это способ принят в практике коммерческих банков Германии, Дании, Швеции.

В российской практике применяют различные способы начисления процентов.

При определении числа дней ссуды по календарю первый и последний день принимаются за один день. Для ускорения расчета точного числа дней финансовой операции пользуются таблицей порядковых номеров дней в году (прил. 1). Продолжительность финансовой операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня.

Приближенное число дней ссуды рассчитывается исходя из условия продолжительности всех месяцев года в 30 дней.

1.4. Переменные процентные ставки

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются переменные ставки в разные периоды начисления. При простых переменных ставках наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_k i_k) = P(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t), \qquad (6)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – последовательные во времени значения простых процентных ставок; $n_1, n_2, ..., n_k$ – периоды, в течение которого действуют соответствующие ставки. Общий срок ссуды определяется суммой отдельных временных периодов $n = \sum_{t=1}^{k} n_t$.

1.5. Реинвестирование

Иногда в практике при вложении средств в краткосрочные депозиты прибегают к последовательному неоднократному повторению наращения по простым процентам полученных на каждом этапе наращения средств, то есть ***реинвестированию***. Наращенная сумма для всего срока определится следующим образом:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)...(1 + n_k i_k) = P \prod_{t=1}^{k} (1 + n_t i_t), \qquad (7)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – ставки, по которым производится реинвестирование; n_1, $n_2, ..., n_k$ – периоды начисления по соответствующим процентным ставкам.

Если периоды начисления и ставки не изменяются во времени, то

наращенная сумма с учетом реинвестирования $S = P(1 + ni)^m$, (8)
где m – количество реинвестиций.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Что понимается под процентами и процентной ставкой?*
2. *Какие бывают процентные ставки?*
3. *Какие временные интервалы применяют в качестве периода начисления?*
4. *Что понимается под банковской маржей?*
5. *Какие базовые ставки Вы знаете?*
6. *Что показывает множитель наращения?*
7. *В чем разница между точными и обыкновенными процентами?*
8. *Во сколько раз изменится множитель наращения при увеличении процентной ставки в k раз?*
9. *Какой способ начисления простых процентов дает больший рост?*
10. *В чем сущность реинвестирования?*

ЗАДАНИЯ

Вариант задания определяется **по двум последним цифрам номера зачетной книжки (**)** (табл.1).

Таблица 1

Выбор варианта задания

**	*Вариант*	**	*Вариант*	**	*Вариант*	**	*Вариант*	**	*Вариант*	**	*Вариант*
01	***1***	18	***18***	35	***5***	52	***22***	69	***9***	86	***26***
02	***2***	19	***19***	36	***6***	53	***23***	70	***10***	87	***27***
03	***3***	20	***20***	37	***7***	54	***24***	71	***11***	88	***28***
04	***4***	21	***21***	38	***8***	55	***25***	72	***12***	89	***29***
05	***5***	22	***22***	39	***9***	56	***26***	73	***13***	90	***30***
06	***6***	23	***23***	40	***10***	57	***27***	74	***14***	91	***1***
07	***7***	24	***24***	41	***11***	58	***28***	75	***15***	92	***2***
08	***8***	25	***25***	42	***12***	59	***29***	76	***16***	93	***3***
09	***9***	26	***26***	43	***13***	60	***30***	77	***17***	94	***4***
10	***10***	27	***27***	44	***14***	61	***1***	78	***18***	95	***5***
11	***11***	28	***28***	45	***15***	62	***2***	79	***19***	96	***6***
12	***12***	29	***29***	46	***16***	63	***3***	80	***20***	97	***7***
13	***13***	30	***30***	47	***17***	64	***4***	81	***21***	98	***8***
14	***14***	31	***1***	48	***18***	65	***5***	82	***22***	99	***9***
15	***15***	32	***2***	49	***19***	66	***6***	83	***23***	00	***10***
16	***16***	33	***3***	50	***20***	67	***7***	84	***24***		
17	***17***	34	***4***	51	***21***	68	***8***	85	***25***		

Используя формулы (1)–(8), решите следующие задачи согласно своему варианту.

1.1. Определите проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна *P* тыс. р., срок ссуды *n* лет, годовая простая процентная ставка *i* %. Исходные данные представлены в табл. 2

Постройте график наращённой суммы в масштабе в зависимости от срока ссуды.

Определите, во сколько раз изменится наращенная сумма при увеличении процентной ставки в два раза.

Таблица 2

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	100	3	18	***16***	60	3	33
2	120	4	22	***17***	110	4,5	30
3	200	2,5	16	***18***	210	5	19
4	80	5	35	***19***	30	2,5	38
5	150	3	21	***20***	190	2	30
6	220	2	20	***21***	240	4	24
7	50	2,5	28	***22***	130	3,5	28
8	180	4	19	***23***	90	2	34
9	260	5	17	***24***	280	5	27
10	70	3	26	***25***	300	4,5	23
11	110	2	32	***26***	250	3	25
12	230	3,5	17	***27***	40	2	34
13	140	4	24	***28***	280	4	18
14	300	5	18	***29***	120	3,5	22
15	160	2,5	22	***30***	80	3	25

1.2. Ссуда в размере *P* тыс. р. выдана на определенный срок под *i* % годовых. На основе исходных данных табл. 3 определите сумму накопленного долга в конце срока тремя методами, применяемыми на практике. Сравните полученные результаты.

Таблица 3

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*Дата выдачи ссуды*	*Дата окончания срока ссуды*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*Дата выдачи ссуды*	*Дата окончания срока ссуды*	*i, %*
1	130	10.01	1.09	27	***16***	120	20.02	20.09	30
2	180	15.02	30.09	19	***17***	160	15.04	1.10	21
3	220	25.03	15.11	18	***18***	200	20.03	1.11	16
4	140	10.03	15.09	38	***19***	190	5.03	10.10	32
5	170	30.01	5.10	25	***20***	160	30.04	20.11	35
6	240	5.04	1.12	23	***21***	100	10.05	20.10	29

Окончание табл. 3

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*Дата выдачи ссуды*	*Дата окончания срока ссуды*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*Дата выдачи ссуды*	*Дата окончания срока ссуды*	*i, %*
7	280	10.02	5.11	20	***22***	230	20.01	15.12	18
8	110	20.04	15.10	31	***23***	260	30.03	10.11	19
9	180	5.05	5.09	33	***24***	190	10.04	25.12	24
10	150	15.01	25.10	26	***25***	140	5.02	30.10	28
11	210	15.05	25.09	17	***26***	170	25.04	10.09	34
12	150	25.02	30.11	36	***27***	250	15.03	5.12	22
13	100	16.04	31.09	27	***28***	300	26.06	10.10	18
14	320	8.06	25.12	24	***29***	220	2.03	27.08	26
15	250	10.05	18.10	19	***30***	180	11.07	29.11	24

1.3. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: в первый год ставка i % , в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1 %. Определите множитель наращения за весь срок ссуды n. Значение процентной ставки i возьмите из табл. 3.

1.4. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях, чтобы долг, равный P тыс. р., вырос до S тыс. р. при условии, что начисляются простые проценты по договорной ставке i % годовых плюс маржа m % ($K = 365$)? Исходные данные представлены в табл. 4.

Таблица 4

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*S, тыс. р.*	*i, %*	*m, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*S, тыс. р.*	*i, %*	*m, %*
1	60	95	10,5	0,5	***16***	80	110	10,5	0,5
2	110	140	12	1	***17***	130	155	12,5	1
3	230	250	10	0,75	***18***	170	200	13	1,5
4	150	180	12,5	1,5	***19***	210	245	11	0,5
5	190	210	13	1,25	***20***	100	125	14	1
6	90	115	11,5	0,5	***21***	280	300	13,5	0,5
7	270	290	14	1,5	***22***	240	265	11,5	1
8	140	165	17	1,75	***23***	160	190	12,5	0,5
9	250	275	13	0,75	***24***	260	280	10	0,75
10	180	205	15	1,75	***25***	200	235	12	1,5
11	220	260	18	2,5	***26***	120	140	9,5	0,5
12	50	80	16	1,5	***27***	70	90	10,5	0,75
13	100	150	14	1,5	***28***	220	180	12	1
14	160	240	13,5	1,75	***29***	140	100	13	1,5
15	240	360	11	1	***30***	300	250	15	1,25

1.5. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме *S* тыс. р. через *t* дней. Первоначальная сумма долга – *P* тыс. р. Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде годовой ставки процента (*K = 360*). Исходные данные представлены в табл. 5.

Таблица 5

Номер варианта	*S, тыс. р.*	*P, тыс. р.*	*t, дн.*	*Номер варианта*	*S, тыс. р.*	*P, тыс. р.*	*t, дн.*
1	100	80	120	***16***	120	70	90
2	200	150	80	***17***	170	110	160
3	340	200	180	***18***	240	160	140
4	360	290	60	***19***	280	190	100
5	110	50	150	***20***	320	240	120
6	180	130	90	***21***	350	280	90
7	280	250	100	***22***	180	120	70
8	140	100	180	***23***	260	210	150
9	310	270	140	***24***	220	180	100
10	220	170	120	***25***	320	260	180
11	380	300	160	***26***	200	140	80
12	90	60	90	***27***	140	90	160
13	150	80	70	***28***	400	320	60
14	270	190	60	***29***	100	60	90
15	320	220	120	***30***	160	80	120

1.6. Заемщик получил в банке кредит на 90 дней по процентной ставке 24 % годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2 % от величины кредита. Определите доходность финансовой операции для банка в виде простой процентной ставки, если банк начисляет обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Как изменится доходность финансовой операции при выдаче кредита на 60 дней?

1.7. Найдите величину дохода кредитора, если через полгода общая стоимость кредита с учетом начисленных процентов составила 540 тыс. р. При этом начислялись простые проценты по способу: «точные проценты с точным числом дней ссуды» по ставке 20 % годовых.

1.8. В банк было положено 1500 р. Через 1 год и 3 месяца наращенная сумма составила 1875 р. Сколько простых процентов в год выплачивает банк?

1.9. За какой срок вклад 500 тыс. р. возрастет до 600 тыс. р. при начислении процентов по простой процентной ставке 20 % годовых?

1.10. Банк выдал кредит на 9 месяцев по простой процентной ставке 25 % годовых, при этом удержав комиссионные в размере 3 % от суммы кредита. Определите фактическую доходность для банка такой кредитной операции в виде годовой простой процентной ставки.

2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1. Начисление сложных годовых процентов

Если в средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга для наращения, как правило, применяют ***сложные проценты***.

База при начислении сложных процентов увеличивается с каждым шагом во времени.

При применении сложных процентов производится периодическая ***капитализация процентов*** – присоединение начисленных процентов к сумме, являющейся базой для их начисления.

Выведем формулу для расчета наращенной суммы при условии, что сложные проценты начисляются и капитализируются один раз в году.

Наращенная сумма составит:

в конце первого года $P + P \cdot i = P(1+i)$;

в конце второго года $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$.

…………………………………………………………...

в конце n-го года наращенная сумма будет

$$S = P(1+i)^n. \tag{9}$$

Это выражение называется ***формулой сложных процентов***.

Проценты за этот период рассчитываются по следующей формуле:

$$I = S - P = P(1+i)^n - 1. \tag{10}$$

Проценты для некоторого промежуточного года t определяются по формуле

$$I_t = S_{t-1} \cdot i = P(1+i)^{t-1} \cdot i, \tag{11}$$

где $t = 1, 2, ..., n$.

Рост по сложным процентам представляет собой процесс, соответствующий геометрической прогрессии, первый член которой равен P, знаменатель – $(1+ i)$, а последний член – наращенной сумме в конце срока.

Множитель наращения по сложным процентам

$$MH = (1+i)^n. \tag{12}$$

Множитель наращения показывает, во сколько раз вырастет первоначальная сумма долга за n лет.

В экономике недвижимости используют ***шесть функций сложных процентов.*** Функции представляют собой множители к определенным величинам в различных экономических задачах.

Формула сложных процентов записывается в символической форме:

$$FV = PV \cdot FM1, \tag{13}$$

где FV – будущая стоимость *(future value)*; PV – текущая стоимость *(present value)*; $FM1$ – функциональный множитель *(functional multiplier).*

Функциональный множитель в (13) представляет собой первую функцию сложных процентов $FM1 = (1+i)^n$.

Этот функциональный множитель носит названия ***коэффициента наращения, множителя наращения, наращённой суммы единичного вложения.***

Величина множителя наращения зависит от двух параметров: i и n. Для ускорения расчетов используют финансовые таблицы, где приведены расчетные значения функциональных множителей для шести функций сложных процентов.

В прил. 2 представлены фрагменты финансовых таблиц.

П р и м е р

Земельный участок сегодня куплен за 500 тыс. р. Определить стоимость земельного участка через 3 года, если среднегодовой темп роста цен на земельном рынке составляет 10 %.

Будущая стоимость земельного участка рассчитывается по формуле (13)

$$FV = PV \cdot FM1 = 500 \cdot 1{,}331 = 665{,}5 \text{ тыс. р.}$$

Значение $FM1$ берем из таблиц сложных процентов (прил. 2).

2.2. Рост по сложным и простым процентам

Для сопоставления наращения по сложным и простым ставкам достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. Графическая иллюстрация наращения по простой и сложной процентным ставкам приведена на рис. 2.

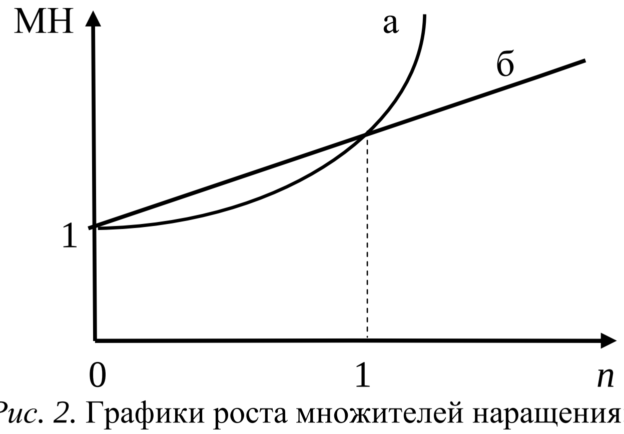


Рис. 2. Графики роста множителей наращения:
а – сложные проценты; б – простые проценты

Соотношения множителей наращения для различных сроков финансовых операций следующие:

а) при $n < 1$, то $(1+ni) \succ (1+i)^n$;

б) если $n > 1$, то $(1+ni) \prec (1+i)^n$;

в) при $n = 1$ множители по простым и сложным процентам равны между собой $(1+ni) = (1+i)^n$.

Таким образом, в краткосрочных операциях ($n < 1$ года) простые проценты дают больший рост, чем сложные проценты. В долгосрочных финансовых вложениях ($n > 1$ года) наращение по сложным процентам значительно выше наращения по простым процентам.

2.3. Формулы расчета срока финансовой операции

Срок финансовой операции определяется из формул наращения по простым и сложным процентам.

а) Для простых процентов наращённая сумма

$$S = P(1 + n \cdot i),$$

из которой следует

$$n = \frac{S/P - 1}{i}. \tag{14}$$

б) Для сложных процентов наращённая сумма

$$S = P(1+i)^n.$$

После преобразования получим $(1+i)^n = S/P$.

Прологарифмировав это выражение, получим $n \cdot \ln(1+i) = \ln S/P$.

Откуда

$$n = \frac{\ln S/P}{\ln(1+i)}. \tag{15}$$

Для определения числа периодов, за которые первоначальная сумма удвоится, применяются:

– для простых процентов «Правило 100», когда расчет проводится по формуле $n = \dfrac{100}{i}$;

– для сложных процентов «Правило 72», когда применяется расчетная формула $n = \dfrac{72}{i}$.

Эти правила служат для расчета примерного числа периодов, за которые вложенная первоначальная сумма удвоится при заданной процентной ставке i.

При проведении расчетов значения ставок наращения нужно брать в процентах.

Это правило дает удовлетворительные результаты при значениях процентных ставок от 3 до 18 %.

2.4. Переменные процентные ставки

В случае неустойчивости кредитно-денежного рынка коммерческие банки используют «классическую» схему начисления процентов, применяя ***плавающие ставки***. В этом случае общий множитель наращения определяется как произведение частных множителей:

$$S = P(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k}, \qquad (16)$$

где i_1, i_2, …, i_k – последовательные во времени значения процентных ставок; n_1, n_2, ..., n_k – периоды, в течение которого действуют соответствующие ставки.

2.5. Начисление процентов при дробном числе лет

Часто срок для начисления процентов не является целым числом лет. При этом в расчетах процентов применяются два метода.

1) Расчет по формуле сложных процентов (9).

2) Расчет по смешанному методу, предполагающему начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть периода – по формуле простых процентов:

$$S = P(1+i)^a(1+bi), \qquad (17)$$

где срок финансовой операции $n = a + b$; a – целое число лет; b – дробная часть временного периода в годах.

2.6. Наращение процентов *m* раз в году

Проценты могут капитализироваться банками не один, а несколько раз в году: по полугодиям, кварталам и т. д. На практике, как правило, в контрактах фиксируется не ставка за период, а годовая ставка с указанием периода начисления процентов, например: «14 % годовых с поквартальным начислением процентов».

Пусть номинальная годовая ставка, указанная в договоре, равна j, а число периодов начисления в году равно m.

В расчетах нужно учесть, что m может принимать следующие значения:

m = 1, если начисление процентов производится 1 раз в год;

m = 2, если начисление процентов полугодовое;

m = 4, если начисление процентов поквартальное;

m = 12, если начисление процентов ежемесячное;

m = 365, если начисление процентов ежедневное.

Номинальная процентная ставка – годовая ставка процента, исходя из которой определяется величина ставки, применяемой в каждом периоде при начислении сложных процентов m раз в году.

Так, при m-разовом начислении процентов используется ставка j/m, тогда число соответствующих ей периодов начисления за весь срок финансовой операции равно $m \cdot n$.

В этом случае формула наращения по сложным процентам представляется в виде

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}, \tag{18}$$

где $m \cdot n$ – общее количество периодов начисления процентов; j – номинальная годовая ставка, выраженная десятичной дробью.

Заметим, что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения.

Иногда в практике используется понятие ***«действительная»* или *«эффективная ставка процента»***. Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год от начисления процентов.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, отражающая реальный относительный доход финансовой операции с учетом заложенных в нее определенных условий (например, m-разовое начисление процентов в году по ставке j/m).

Эффективная ставка при внутригодовом начислении процентов – это годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m-разовое начисление процентов в году по ставке j/m.

Обозначим эффективную ставку через i_{ef}.

По определению, множители наращения по двум видам ставок (эффективной и номинальной при m-разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1 + i_{ef})^n = (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}.$$

Из этого равенства получим выражение для расчета эффективной процентной ставки с учетом m-разового внутригодового начисления процентов:

$$i_{ef} = (1+\frac{j}{m})^m - 1. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что эффективная ставка при начислении процентов 1 раз в год ($m = 1$) равна номинальной ($i_{ef} = j$). Если используется внутригодовое начисление процентов ($m > 1$), то эффективная ставка больше номинальной.

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i_{ef} не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон, т. е. обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Что понимают под сложными процентами?*
2. *В чем состоит принципиальная разница между простыми и сложными процентами?*
3. *Каково соотношение множителей наращения по сложным и простым процентам для разных сроков начисления?*
4. *В чем сущность расчета наращённой суммы при использовании банком переменных процентных ставок?*
5. *Какая формула расчета наращённой суммы применяется при m-разовом внутригодовом начислении процентов?*
6. *В чем особенность смешанного метода при начислении процентов за дробное число лет?*
7. *Что понимают под номинальной процентной ставкой?*
8. *В чем смысл эффективной годовой процентной ставки?*
9. *Как изменяется эффективная годовая процентная ставка с увеличением внутригодовых начислений?*
10. *В каком случае эффективная годовая процентная ставка совпадает с номинальной?*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (9)–(19), решите следующие задачи согласно своему варианту.

2.1. Какой величины достигнет долг, равный P тыс. р., через n лет при росте по сложной годовой ставке i % ? Постройте график наращенной суммы в масштабе в зависимости от срока ссуды.

Исходные данные представлены в табл. 6.

Таблица 6

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	500	3	18	**16**	140	3	24
2	100	2,5	22	**17**	160	2,5	25
3	50	5	14	**18**	400	6	14
4	300	6	12	**19**	500	8	11
5	200	5,5	16	**20**	300	5,5	14
6	150	4	20	**21**	180	4	18
7	120	2	19	**22**	550	7	20
8	400	3,5	15	**23**	150	3	26
9	600	5	13	**24**	220	5	20
10	130	4	22	**25**	100	3,5	15
11	450	8	13	**26**	130	2	28
12	300	6	10	**27**	250	6	12
13	80	4,5	12	**28**	300	4	16
14	500	7	11	**29**	280	3	19
15	100	5	21	**30**	360	4,5	17

2.2. Для сравнения роста по простым и сложным процентам произведите расчеты множителей наращения для следующих периодов времени: n = 0,25; 0,5; 1; 5; 10 лет. Значение процентной ставки возьмите из табл. 6.

Постройте графики множителей наращения в зависимости от срока ссуды в равномерном масштабе в одной системе координат.

Результаты вычислений занесите в табл. 7.

Таблица 7

Расчетные значения

Множитель наращения	Срок ссуды n, год				
	0,25	0,5	1	5	10
По простым процентам $MH = 1 + n \times i$					
По сложным процентам $MH = (1 + i)^n$					

2.3. Найдите срок удвоения первоначального капитала, применяя сложные и простые проценты для ставки, значение которой возьмите из табл. 6.

2.4. Срок ссуды – n лет, договорная процентная ставка – i % годовых, плюс маржа 0,5 % в первые два года и 0,75 % в оставшиеся.

Определите множитель наращения на основании исходных данных, представленных в табл. 8.

Таблица 8

Номер варианта	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*n, год*	*i, %*
1	6	8	***11***	8	12	***21***	7	11
2	5	14	***12***	4	15	***22***	5	14
3	8	12	***13***	6	8	***23***	4	8
4	7	9	***14***	3	10	***24***	8	11
5	4	15	***15***	5	16	***25***	7	12
6	3	13	***16***	8	9	***26***	3	15
7	5	10	***17***	7	12	***27***	6	9
8	6	16	***18***	4	11	***28***	8	10
9	7	14	***19***	6	10	***29***	5	13
10	4	11	***20***	9	13	***30***	4	16

2.5. Кредит в размере P тыс. р. выдан на a лет и b дней под i % годовых. Определите сумму долга на конец срока общим и смешанным методами на основании исходных данных, представленных в табл. 9.

Таблица 9

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*a, год*	*b, дн.*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*a, год*	*b, дн.*	*i, %*
1	400	3	90	17	***16***	160	6	120	15
2	200	4	210	13	***17***	300	3	60	20
3	300	3	30	22	***18***	200	5	180	13
4	500	5	120	12	***19***	400	4	30	17
5	120	4	160	15	***20***	120	6	90	11
6	100	6	60	18	***21***	210	5	210	12
7	80	4	120	14	***22***	340	3	120	19
8	220	3	150	21	***23***	150	4	150	18
9	140	5	180	12	***24***	240	3	210	14
10	180	6	30	19	***25***	225	6	90	12
11	200	5	60	15	***26***	180	4	160	15
12	320	4	210	16	***27***	350	3	30	23
13	150	6	180	12	***28***	100	5	150	18
14	240	3	150	14	***29***	270	4	180	20
15	400	5	90	20	***30***	300	6	60	16

2.6. Ссуда выдана на срок n лет, номинальная годовая ставка j %. Определите множители наращения при различных начислениях процентов: годовых, полугодовых, поквартальных, ежемесячных и ежедневных.

Исходные данные представлены в табл. 10. Результаты вычислений занесите в табл. 11.

Таблица 10

Номер варианта	*n, год*	*j, %*	*Номер варианта*	*n, год*	*j, %*	*Номер варианта*	*n, год*	*j, %*
1	6	12	**11**	5	13	**21**	3	15
2	9	16	**12**	3	20	**22**	7	19
3	4	20	**13**	7	18	**23**	5	17
4	3	13	**14**	10	15	**24**	4	14
5	7	21	**15**	5	19	**25**	8	16
6	6	17	**16**	4	12	**26**	10	20
7	4	19	**17**	8	21	**27**	5	13
8	8	14	**18**	3	17	**28**	9	18
9	5	18	**19**	6	14	**29**	3	21
10	10	15	**20**	9	16	**30**	6	12

Таблица 11

Расчетные значения

m	*1*	*2*	*4*	*12*	*365*
МН					

2.7. В договоре указана номинальная годовая ставка *j*, начисление процентов ежемесячное. Определите эффективную ставку. Значение номинальной ставки возьмите из табл. 10.

2.8. Определите номинальную процентную ставку, если эффективная годовая процентная ставка равна 36 % и сложные проценты начисляются ежемесячно.

2.9. В долг на 3,5 года предоставлена сумма 800 тыс. р. с условием возврата 2000 тыс. р. Определите эффективную процентную ставку этой финансовой сделки.

2.10. Фирме нужно накопить 3 млн р., чтобы через 5 лет купить помещение под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 8 % при полугодовом начислении процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы? Является ли этот способ приобретения недвижимости экономически целесообразным?

2.11. Ссуда выдана под процентную ставку 24 % годовых на 4 года. При выдаче ссуды взысканы комиссионные в размере 2,5 % от величины ссуды. Определите доходность такой сделки в виде эффективной процентной ставки, если кредитор начисляет проценты ежемесячно.

3. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА

3.1. Погашение краткосрочных обязательств частичными платежами

Краткосрочные обязательства могут погашаться с помощью последовательности ***частичных платежей***. Как в этом случае определяется остаток задолженности и какая сумма берется за базу для расчета процентов?

На практике применяются два метода погашения краткосрочной задолженности:

– ***актуарный*** **(***Actuarial Method*);
– метод, названный **правилом торговца** (*Merchant`s Rule*).

Актуарный метод применяется в основном в операциях со сроком более года. Начисление процентов производится на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа.

Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Остаток долга служит базой для начисления процентов на следующий период.

Если частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются и сумма поступления приплюсовывается к следующему платежу.

Погашение задолженности частичными платежами наглядно можно представить на графике, называемом ***контуром финансовой операции*** (рис. 3).

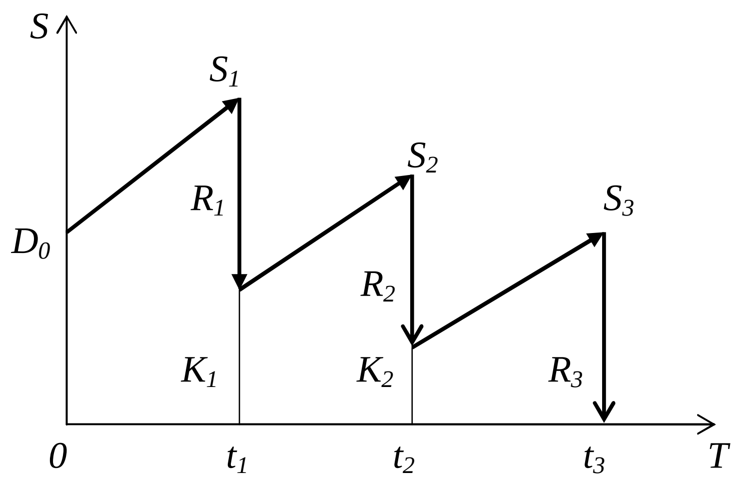


Рис. 3. График погашения задолженности частичными платежами

На графике приняты следующие обозначения:

D_0 – первоначальная сумма долга (сумма ссуды);

T – срок ссуды;

t_1, t_2, t_3 – временные интервалы;

R_1, R_2 – последовательные платежи;

R_3 – платеж, покрывающий остаток задолженности в конце срока финансовой операции;

K_1, K_2 – остатки долга;

S_1, S_2, S_3 – наращённые суммы в конце временных интервалов.

При погашении задолженности по актуарному методу получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности:

$$K_1 = D_0(1 + t_1 \cdot i) - R_1;$$
$$K_2 = K_1(1 + t_2 \cdot i) - R_2;$$
$$K_2(1 + t_3 \cdot i) - R_3 = 0.$$

Последняя уплата должна полностью покрывать остаток задолженности. Сбалансированная финансовая операция обязательно имеет замкнутый контур.

Метод расчета по правилу торговца предусматривает другой подход к погашению задолженности. Здесь возможны два варианта.

1-й вариант. Если срок ссуды не превышает одного года, то сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения долга. Параллельно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами. Последний взнос должен сбалансировать долг и платежи.

2-й вариант. Если срок ссуды превышает год, то все указанные расчеты в первом варианте делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток долга погашается в следующем году.

Остаток долга на конец срока или года рассчитывается по формуле

$$K = S - R = D(1 + n \cdot i) - \sum_j R_j(1 + t_j \cdot i),$$

где D – первоначальная сумма долга; S – наращённая сумма долга; R – наращённая сумма платежей; R_j – сумма частичного платежа; n – общий срок ссуды; t_j – интервал времени от момента платежа до конца срока ссуды или года.

Графическое изображение такой финансовой операции охватывает как бы два параллельных контура (рис. 4). Второй контур относится к промежуточному платежу.

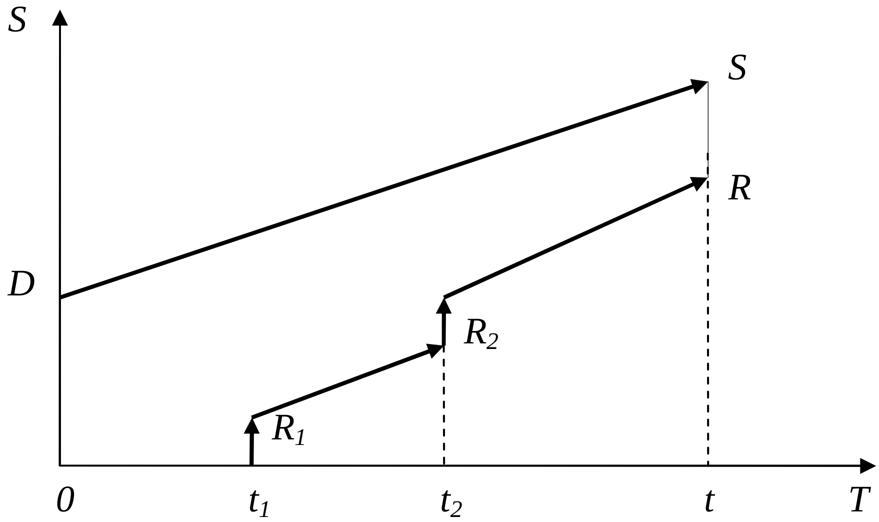


Рис. 4. График погашения задолженности по правилу торговца

3.2. Погашение долгосрочной задолженности

3.2.1. Особенности погашения долгосрочной задолженности. Для количественного анализа долгосрочной задолженности выделяются три цели:

1) разработка плана погашения долга согласно принятым условиям финансового соглашения;

2) оценка величины долга на любой момент времени с учетом всех поступлений платежей для его погашения и определения состояния денежного рынка на момент оценивания;

3) анализ эффективности (доходности) финансовой операции для кредитора.

Разработка плана погашения долга заключается в составлении графика периодических платежей заемщика. Такие расходы должника называют расходами по обслуживанию долга, расходами по займу, срочными уплатами.

Нужно понимать, что долг состоит из двух частей: ***основного долга и процентов по долгу.*** Поэтому срочные уплаты включают выплаты текущих начисленных процентов и суммы для погашения части основного долга.

Методы определения размера срочных уплат зависят от срока займа, уровня и вида процентных ставок, продолжительности льготного периода, методов уплаты процентов и способов погашения основной суммы долга.

В льготном периоде основной долг не погашается, а выплачиваются только проценты.

В долгосрочных займах проценты могут присоединяться к основной сумме долга, но чаще выплачиваются на протяжении всего срока займа.

Основная сумма долга может погашаться одним платежом, включая сумму основного долга и сумму начисленных процентов за весь срок займа, или частями, в рассрочку, при значительных размерах задолженности.

Метод погашения в рассрочку часто называют ***амортизацией долга***. Амортизация долга означает его постепенное погашение по заранее утвержденному плану (плану амортизации). Амортизация долга осуществляется различными способами; к ним относятся:

– погашение долга ***аннуитетными платежами*** (равными срочными уплатами);

– погашение ***основного долга равными суммами*** (равными долями);

– погашение всей задолженности переменными срочными уплатами.

При определении срочных платежей по займу будем использовать следующие обозначения:

D – сумма задолженности;

R – срочный платеж;

I – проценты по займу;

i – процентная ставка по займу;

n – общий срок займа.

Рассмотрим особенности составления планов погашения задолженности перечисленными методами.

3.2.2. Погашение долга аннуитетными платежами. ***Аннуитетные платежи*** представляют собой равные по величине периодические денежные уплаты, выплачиваемые кредитору в погашение полученного от него займа, включая проценты.

Таким образом, расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение долга. По мере амортизации долга величина общей задолженности последовательно сокращается, соответственно уменьшаются процентные платежи и увеличиваются платежи по погашению основного долга.

Использование в финансово-кредитной операции условий, предполагающих выплаты в виде аннуитетных платежей, существенно упрощает количественный анализ, дает возможность применять стандартные формулы и таблицы значений необходимых для расчетов коэффициентов и быстро выполнять расчеты.

Очень важным является различие аннуитетных платежей по моменту выплат платежей в пределах периода. Если платежи осуществляются в конце периодов, то их называют ***обыкновенными***, или ***постнумерандо***, если же платежи производятся в начале периодов, то их называют ***пренумерандо***.

План погашения долга равными срочными уплатами разрабатывается при условии (если процентная ставка определена), что задается срок погашения долга либо фиксированная сумма аннуитетных уплат.

Если задан срок погашения долга, то производится расчет аннуитетного платежа, затем его величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение долга. После этого находится остаток задолженности .

Выведем формулу для расчета ежегодной срочной уплаты Y постнумерандо.

Остатки долга будут определяться следующими выражениями:
в конце первого года – $D(1+i)-Y$;
в конце второго года – $[D(1+i)-Y](1+i)-Y$;
………………………………………………………
в конце n-го года – $D(1+i)^n - Y\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+...+(1+i)+1\right]=0$. (20)

Члены суммы в квадратных скобках в выражении (20) представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1+i$, первый член которой – a_1 = 1, а последний – $(1+ i)^{n-1}$. Из курса элементарной математики известна формула суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, \tag{21}$$

где a_1 – первый член геометрической прогрессии; q – знаменатель геометрической прогрессии.

С учетом формулы (21) преобразуем выражение (20):

$$D(1+i)^n - Y\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0.$$

Отсюда

$$Y = \frac{D(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} = D\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{22}$$

Тогда формула расчета размера аннуитетных платежей:

$$Y = \frac{D}{a_{n,i}}, \tag{23}$$

где $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения годового аннуитета.

Значения коэффициента приведения годового аннуитета табулированы и представлены в финансовых таблицах (прил. 2).

Аналогичным образом разрабатываются планы погашения долга для случаев, когда выплата процентов и погашение основного долга производятся несколько раз в году.

План погашения долга равными аннуитетными платежами постнумерандо представлен в табл. 12.

Таблица 12

План погашения долга аннуитетными платежами

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение основного долга	Долг на конец года
1	D_0	Y	$I_1=D_0 \cdot i$	$Y- D_0 \cdot i$	$D_1=D_0(1+ i) - Y$
2	D_1	Y	$I_2=D_1 \cdot i$	$Y- D_1 \cdot i$	$D_2=D_1(1+i) - Y$
…					
n	D_{n-1}	Y	$I_n=D_{n-1} \cdot i$	$Y- D_{n-1} \cdot i$	$D_n=D_{n-1}(1+ i) -Y=0$

При разработке условий договора может возникнуть задача по определению срока погашения долга по заданному размеру аннуитетных платежей. Такая необходимость возникает при корректировке первичных условий для достижения полной сбалансированности платежей.

Срок погашения долга легко находится из формулы (22):

$$Y = D\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

После преобразования, получим

$$(1+i)^{-n} = 1-\frac{D}{Y}i.$$

После логарифмирования этого выражения, получим

$$n = \frac{-\ln\left(1-\frac{D}{Y}i\right)}{\ln(1+i)}. \qquad (24)$$

Очевидно, что решение существует тогда, когда $\frac{D}{Y}i$ < 1. Расчетное значение n в общем случае оказывается дробным. Поэтому его округляют до наименьшего целого числа.

Однако при этом план не будет сбалансированным. Для его корректировки нужно найти новое значение *Y* или скомпенсировать остаток долга.

3.2.3. Погашение основного долга равными суммами (равными долями). Если долг в размере D, выданный на n лет, погашается равными суммами, тогда ежегодная уплата на погашение основного долга составит:

$$d = \frac{D}{n}. \qquad (25)$$

Размер основного долга со временем последовательно сокращается, соответственно и уменьшаются выплачиваемые проценты, т. к. они начисляются на остаток долга.

Если платежи производятся в конце каждого года на протяжении всего срока ссуды, то схему расчета показателей плана погашения задолженности можно представить в виде, приведенном в табл. 13.

Таблица 13

План погашения основного долга равными суммами

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение основного долга	Долг на конец года
1	D_0	$Y_1 = I_1 + d$	$I_1 = D_0 \cdot i$	$d = D/n$	$D_1 = D_0(1 + i) - Y_1 = D_0 - d$
2	D_1	$Y_2 = I_2 + d$	$I_2 = D_1 \cdot i$	d	$D_2 = D_1(1 + i) - Y_2 =$ $= D_0 - 2d$
. . .					
n	D_{n-1}	$Y_n = I_n + d$	$I_n = D_{n-1} \cdot i$	d	$D_n = 0$

Рассмотренный метод отличается простотой расчетов. Однако срочные уплаты в начале срока погашения выше, чем в конце, что часто является нежелательным для должника.

3.2.4. Переменные расходы по займу. Условие равных срочных уплат **(**$Y = const$**)** не всегда оказывается удобным. Например, погашение долга может быть связано с поступлениями средств от каких-либо источников и зависеть от ряда обстоятельств. В этом случае размеры срочной уплаты планируются в виде графика погашения долга. Размер последней срочной уплаты не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

Схема расчета плана погашения долга приведена в табл. 14.

Таблица 14

План погашения долга переменными срочными уплатами

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение основного долга	Долг на конец года
1	D_0	Y_1	$D_0 \cdot i$	$Y_1 - D_0 \cdot i$	$D_0(1 + i) - Y_1$
2	D_1	Y_2	$D_1 \cdot i$	$Y_2 - D_1 \cdot i$	$D_1(1 + i) - Y_2$
...					
n	D_{n-1}	Y_n	$D_{n-1} \cdot i$	$Y_n - D_{n-1} \cdot i$	$D_{n-1}(1 + i) - Y_n$

Погашение долга может осуществляться последовательностью срочных уплат, представляющих собой арифметическую или геометрическую прогрессии. Вывод расчетных формул срочных уплат для этих случаев предлагается сделать самостоятельно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Какие способы погашения краткосрочных обязательств известны в международной практике?*
2. *В чем суть актуарного метода погашения задолженности и когда он применяется?*
3. *Что понимается под контуром финансовой операции?*
4. *Какая финансовая операция считается сбалансированной?*
5. *Назовите методы погашения долгосрочных займов.*
6. *Что понимается под аннуитетными платежами?*
7. *Как называют аннуитетные уплаты с выплатой в начале и в конце временных периодов?*
8. *Как изменяются размеры платежей при погашении долга к концу срока в разных методах?*
9. *Дайте сравнительную оценку методов погашения аннуитетными платежами общей задолженности и основного долга равными долями с позиции заемщика.*
10. *Как определить срок погашения кредита при условии заданной величины аннуитетного платежа?*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (22)–(25), решите следующие задачи согласно своему варианту.

3.1. Имеется обязательство погасить долг в размере D_0 тыс. р., выданный под i % годовых, в определенный срок. Кредитор согласен получать частичные платежи. Дата и размер частичных поступлений указаны в табл. 15. При начислении процентов кредитором используется актуарный метод.

Необходимо:

1) составить план погашения задолженности, используя табл. 16;

2) определить остаток задолженности на конец срока займа;

3) построить контур финансовой операции в масштабе.

При разработке плана погашения задолженности проводят расчет временных периодов начисления процентов между отдельными платежами по погашению долга с учетом, что по кредиту начисляют точные проценты с точным числом ссуды. Точное количество дней между двумя последовательными платежами определяют по таблице прил. 1.

Таблица 15

Номер варианта	Размер долга D_0, тыс. р.	Процентная ставка i, %	Срок займа	Частичные поступления					
				R_1		R_2		R_3	
				Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.	Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.	Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.
1	100	24	15.03.12 - 10.01.13	1.06.12	20	15.09.12	50	5.11.12	10
2	800	20	10.02.12 - 20.03.13	30.04.12	180	10.08.12	240	1.01.13	320
3	350	26	5.04.12 - 15.07.13	15.10.12	90	30.12.12	120	20.03.13	90
4	200	28	1.06.12 - 30.12.13	30.12.12	60	15.08.13	30	15.09.13	80
5	700	25	20.02.12 - 10.05.13	10.06.12	200	15.12.12	240	1.03.13	160
6	500	20	15.04.12 - 25.07.13	10.08.12	150	1.12.12	50	5.04.13	210
7	450	23	10.01.12 - 20.05.13	20.04.12	60	5.07.12	150	10.02.13	180
8	300	24	30.03.12 - 10.09.12	15.06.12	60	25.12.12	80	20.07.13	50
9	300	19	5.02.12 - 25.06.13	25.08.12	50	10.01.13	90	15.08.13	150
10	600	18	12.03.12 - 12.09.13	2.05.12	150	12.03.13	200	27.07.13	100
11	400	22	18.06.12 - 30.12.13	3.09.12	100	10.01.13	80	20.09.13	90
12	800	18	25.05.12 - 30.11.13	5.10.12	210	30.03.13	100	10.07.13	500
13	400	23	6.08.12 - 16.08.13	1.07.12	180	20.11.12	60	26.04.13	120
14	500	17	15.08.12 - 30.12.13	30.11.12	50	15.03.13	200	5.10.13	180
15	700	21	8.04.12 - 18.09.13	2.02.12	60	8.11.12	210	28.05.13	280
16	700	24	10.06.12 - 30.12.13	5.11.12	180	25.05.13	300	1.08.13	480
17	500	22	20.07.12 - 30.11.13	15.10.12	90	1.03.13	240	15.09.13	100
18	400	19	12.05.12 - 18.10.13	7.09.12	80	12.03.13	180	3.06.13	150
19	200	23	5.01.12 - 30.06.13	15.04.12	40	25.11.12	150	10.01.13	50

Окончание табл. 15

Номер варианта	Размер долга D_0, тыс. р.	Процентная ставка , %i	Срок займа	Частичные поступления					
				R_1		R_2		R_3	
				Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.	Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.	Дата поступления	Размер платежа, тыс. р.
20	250	25	25.02.12 - 10.05.13	5.05.12	30	15.12.12	80	10.03.13	100
21	600	24	18.03.12 - 20.08.13	3.07.12	100	13.03.13	200	7.07.13	250
22	300	21	6.01.12 - 18.06.13	30.05.12	60	10.11.12	150	15.03.12	120
23	400	20	10.05.12 - 5.11.13	1.11.12	60	16.05.13	100	1.07.13	180
24	1000	18	20.04.12 - 15.10.13	10.10.12	240	25.12.12	300	10.05.13	400
25	800	19	15.02.12 - 10.08.13	5.04.12	150	30.11.12	240	1.03.13	300
26	300	23	1.03.12 - 30.08.13	11.11.12	100	6.05.13	80	30.10.13	50
27	600	24	25.07.12 - 20.12.13	1.03.13	80	16.06.13	250	6.10.13	150
28	500	22	5.08.12 - 30.11.13	25.02.13	120	5.06.13	180	10.08.13	120
29	800	18	10.03.12 - 25.08.13	30.05.12	100	1.02.13	200	11.06.13	480
30	1000	19	12.04.12 - 12.10.13	2.06.12	240	7.12.12	360	12.06.13	200

Таблица 16

План погашения долга

Временной интервал, год	Остаток долга на начало срока D, тыс. р.	Расходы по займу R, тыс. р.	Проценты I, тыс. р.	Погашение основного долга (R – I), тыс. р.	Долг на конец срока D – (R – I), тыс. р.
n_1	D_0	R_1			
n_2		R_2			
n_3		R_3			
n_4					

3.2. Кредит размером *D* тыс. р. погашается аннуитетными платежами постнумерандо за *n* лет. Проценты за кредит начисляются по годовой процентной ставке *i* %.

Исходные данные представлены в табл. 17.

Требуется:

1) составить план погашения займа;
2) построить контур финансовой операции в масштабе.

Таблица 17

Номер варианта	*D, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*D, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	1000	4	20	***16***	750	5	12
2	300	3	15	***17***	1500	3	18
3	500	5	18	***18***	600	5	14
4	600	3	16	***19***	900	4	25
5	1000	5	13	***20***	510	3	16
6	800	4	12	***21***	1500	5	12
7	300	5	15	***22***	360	3	18
8	900	3	14	***23***	1200	6	15
9	1200	4	22	***24***	810	3	10
10	450	3	18	***25***	1600	4	22
11	600	4	16	***26***	660	3	20
12	1200	5	13	***27***	250	5	17
13	400	4	17	***28***	320	4	13
14	800	5	20	***29***	960	4	18
15	480	4	15	***30***	800	5	19

3.3. Кредит размером *D* тыс. р. выдан на *n* лет под годовую процентную ставку *i* %. Основной долг погашается равными долями.

Исходные данные возьмите из табл. 17.

Требуется:

1) составить план погашения кредита;
2) построить контур финансовой операции в масштабе;
3) провести сравнительный анализ двух вариантов погашения кредита на основе расчетов задач 3.2 и 3.3:
   - сравнить суммы выплаченных процентов;
   - рассчитать, во сколько раз общая стоимость кредитов превышает их первоначальный размер по двум вариантам;
   - построить графики платежей по годам в масштабе (рис. 5);
   - сделать выводы по проведенному анализу.

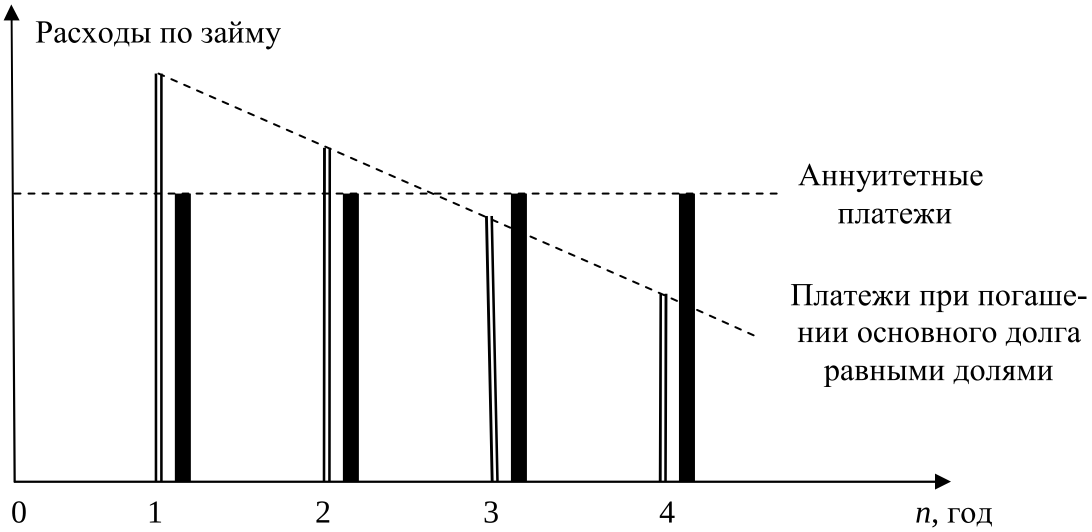


Рис. 5. Осуществление платежей по годам по двум методам

3.4. Кредит в размере D тыс. р. решено погасить по специальному графику за четыре года – размеры расходов по погашению долга по трем годам указаны в таблице. Остаток выплачивается в конце четвертого года. Составьте план погашения кредита при условии, что процентная ставка установлена на уровне i %. Изобразите контур финансовой операции в масштабе. Исходные данные представлены в табл. 18.

Таблица 18

Номер варианта	*D, тыс. р.*	*i, %*	*Срочные уплаты, тыс. р.*			*Номер варианта*	*D, тыс. р.*	*i, %*	*Срочные уплаты, тыс. р.*		
			R_1	R_2	R_3				R_1	R_2	R_3
1	400	12	100	50	200	***16***	300	16	100	60	80
2	250	20	50	100	30	***17***	400	18	160	100	80
3	600	14	100	150	200	***18***	100	22	25	50	30
4	50	16	10	20	10	***19***	200	14	60	80	40
5	200	18	40	50	60	***20***	600	12	200	150	180
6	300	14	80	50	100	***21***	500	15	180	170	100
7	120	20	20	30	40	***22***	250	20	100	50	70
8	100	12	40	20	30	***23***	120	18	60	30	20
9	500	16	100	120	200	***24***	400	12	150	130	100
10	400	15	50	120	150	***25***	150	16	80	30	20
11	150	20	30	50	60	***26***	300	14	120	60	80
12	200	14	50	20	80	***27***	100	19	25	40	20
13	100	18	30	50	10	***28***	200	18	70	40	60
14	450	15	120	150	100	***29***	50	16	20	10	5
15	300	16	150	50	60	***30***	500	14	200	80	100

3.5. Кредит в размере D тыс. р. выдан под i % годовых. Для погашения долга предполагается выделять сумму d тыс. р. Оцените величину срока, необходимого для погашения задолженности. Округлите расчетный срок. Для сбалансированности плана погашения долга рассмотрите две возможности:

1) рассчитайте новое значение срочных уплат *Y*;

2) при прежних уплатах рассчитайте остаток долга на последний год займа.

Исходные данные представлены в табл. 19.

Таблица 19

Номер варианта	*D, тыс. р.*	*i, %*	*d, тыс. р.*	*Номер варианта*	*D, тыс. р.*	*i, %*	*d, тыс. р.*
1	100	18	30	***16***	200	14	40
2	600	16	150	***17***	900	15	200
3	500	14	100	***18***	700	12	150
4	200	12	50	***19***	300	18	100
5	700	20	200	***20***	300	20	50
6	450	15	150	***21***	500	16	100
7	300	12	100	***22***	200	14	60
8	800	14	200	***23***	300	18	120
9	750	18	150	***24***	100	12	40
10	400	14	100	***25***	800	14	200
11	900	12	300	***26***	450	15	150
12	600	16	200	***27***	400	16	80
13	200	15	70	***28***	1000	18	250
14	500	18	100	***29***	200	15	80
15	1000	14	300	***30***	600	20	200

3.6. Заем взят под 24 % годовых. Остаток задолженности погашается по 50 тыс. р. ежеквартально в течение двух лет. Из-за изменения экономической ситуации в стране ставка снизилась до 12 % годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

3.7. В результате внедрения инновационных мероприятий ожидаемый годовой прирост прибыли на предприятии составляет величину *П* тыс. р. Процесс внедрения составляет один год и финансируется с привлечением заемных средств объемом *D* тыс. р. по ставке *i* %. Определите срок возврата кредита, если в качестве источника его погашения оговаривается только величина прибыли *П*.

3.8. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн р. оплачивается в рассрочку ежеквартально в течение трех лет с начислением процентов на остаток долга по годовой процентной ставке 12 % годовых. Определите величину аннуитетных платежей, если начало оплаты перенесено на полгода после подписания контракта.

4. НАЛОГИ НА ПРОЦЕНТЫ НАРАЩЕНИЕ С КОНВЕРСИЕЙ ВАЛЮТЫ

4.1. Налог на начисленные проценты

В ряде зарубежных стран получаемые проценты как юридическими, так и физическими лицами, являющиеся доходом на вложенную денежную сумму, облагаются налогом. Налоговые отчисления снижают процентный доход, а следовательно, и размер реальной наращенной суммы.

Рассмотрим расчет наращенных сумм с учетом выплаты налогов при начислении простых и сложных процентов.

Обозначим наращенную сумму до выплаты налога через S, а с учетом выплаты налога – S_g. Если ставка налога на проценты равна g, то сумма налога на проценты составит

$$N = I \cdot g. \qquad (26)$$

4.1.1. Налог на проценты, начисленные по простой процентной ставке. При начислении простых процентов, наращенная сумма с учетом уплаты налога составит

$$S_g = S - N = S - I \cdot g = P(1 + ni) - Pnig = P[1 + ni(1 - g)].$$

Окончательное выражение показывает, что налог на проценты, по существу, уменьшает процентную ставку: начисление процентов фактически происходит по ставке $i(1 - g)$.

4.1.2. Налог на проценты, начисленные по сложной процентной ставке. В долгосрочных финансовых операциях при начислении налога на сложные проценты возможны следующие три варианта:

– налог начисляется на всю сумму процентов, причитающихся за весь срок финансовой операции;

– налог на проценты начисляется в конце каждого года и ежегодно выплачивается из наращенной суммы;

– налог на проценты начисляется последовательно в конце каждого года и выплачивается не из вложенных денежных средств, а из других источников.

Рассмотрим первый вариант начисления налога на проценты.

В этом случае величина начисленных процентов в конце срока финансовой операции составит

$$I = S - P = P(1 + i)^n - P = P\left[(1 + i)^n - 1\right]. \qquad (27)$$

Тогда сумма налога на проценты

$$N = P\left[(1 + i)^n - 1\right] \cdot g. \qquad (28)$$

Наращенная сумма после выплаты налога

$$S_g = S - N = P(1+i)^n - P\left[(1+i)^n - 1\right] \cdot g = P(1+i)^n - P(1+i)^n \cdot g + Pg .$$

Окончательно получим

$$S_g = P\left[(1+i)^n (1-g) + g\right]. \qquad (29)$$

Во втором варианте сумма налога на проценты определяется за каждый истекший год и является переменной величиной, увеличивающейся со временем.

Налог на проценты, начисленные за любой год финансовой операции, рассчитывается с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$N_t = I_t g = (S_t - S_{t-1})g = P\left[(1+i)^t - (1+i)^{t-1}\right] \cdot g = P(1+i)^{t-1}(1+i-1)g ;$$

$$N_t = P(1+i)^{t-1} ig . \qquad (30)$$

Величины начисленных налогов на проценты за отдельные года финансовой операции, как видно из формулы (30), представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $g = (1 + i)$.

Итоговая сумма налоговых начислений за весь срок n будет равна сумме начисленных за отдельные года финансовой операции налоговых выплат на проценты. Она представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, которая определяется по формуле (21):

$$S_n = \frac{a_{1(}q^n - 1)}{q-1},$$

где первый член геометрической прогрессии $a_1 = P \cdot i \cdot g$, а знаменатель прогрессии – $q = 1 + i$.

Подставляя в представленную формулу необходимые выражения, получим

$$N = P \cdot i \cdot g \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = P \cdot i \cdot g \frac{(1+i)^n - 1}{i} = P\left[(1+i)^n - 1\right] \cdot g . \qquad (31)$$

Полученное выражение совпадает с (28).

Таким образом, оба варианта дают одинаковые результаты расчета налоговых начислений за весь срок финансовой операции.

Размеры налоговых процентных ставок за каждый год могут меняться в зависимости от условий, что усложняет расчеты. Налог за каждый год финансовой операции выплачивается из соответствующей процентной суммы.

4.1.3. Налог на проценты в Российской Федерации. В нашей стране налогообложение процентов, начисленных на сумму вклада, осуществляется в соответствии с законодательством. Это означает, что с суммы процентного дохода, начисленного банком в пользу вкладчика, этим банком будет автоматически удержан налог, т. е. часть от суммы дохода банк перечисляет государству.

Налог удерживается всякий раз, когда банк выплачивает вкладчику или перечисляет проценты по вкладу. Частота перечислений определяется способом начисления процентов, прописанным в договоре: в конце срока вклада, ежемесячно, ежеквартально или через другие промежутки времени.

Основным критерием при исчислении налога на доходы физических лиц с процентов, получаемых по вкладам в банке, является ставка рефинансирования Центрального Банка РФ. Ставка рефинансирования является инструментом денежно-кредитного регулирования, с помощью которого Центральный Банк воздействует на ставки межбанковского рынка, а также ставки по депозитам юридических и физических лиц и кредитам, предоставляемым им кредитным организациям, а также является одним из методов антиинфляционной политики. На 01.01.2012 действующая ставка рефинансирования – 8 %.

Сумма начисленных по рублевому банковскому вкладу процентов не облагается НДФЛ, если процентная ставка в соответствии условиями договора не превышает ставку рефинансирования, увеличенную на пять пунктов. Если процентная ставка по банковскому вкладу в соответствии с условиями договора превышает указанное значение, то разница подлежит обложению НДФЛ по ставке 35 % – для физических лиц резидентов РФ и 30% – для физических лиц нерезидентов РФ.

П р и м е р

Банковский вклад составляет 100 000 р. Договор банковского вклада заключен на срок 90 дней. Процентная ставка – 15 % годовых.

На сумму вклада по условиям договора начислены проценты:

$$100\ 000 \cdot 0{,}15 \frac{90}{365} = 3\ 698{,}63\ \ р.$$

Ставка рефинансирования – 8 % годовых. Рассчитаем сумму процентов, исходя из ставки рефинансирования, увеличенной на 5 пунктов (8 % + 5 % = 13 %):

$$100\ 000 \cdot 0{,}13 \frac{90}{365} = 3\ 205{,}48\ \ р.$$

Сумма 3 205,48 р. не подлежит обложению НДФЛ. Разница же между процентами, начисленными по условиям договора, и указанной суммой является налогооблагаемой базой:

$$3\ 698{,}63 - 3\ 205{,}48 = 493{,}15\ \ р.$$

Сумма налога, подлежащая перечислению в бюджет (сумма налога определяется в полных рублях): 493,15 · 0,35 = 173 р.

Таким образом, вкладчику будет выплачен доход по его рублевому вкладу за вычетом удержанного налога:

$$3\ 698{,}63 - 173 = 3\ 525{,}63\ \ р.$$

Сумма начисленных по вкладу в иностранной валюте процентов не облагается НДФЛ, если процент в соответствии условиями договора не превышает 9 % годовых. Размер налоговых ставок аналогичен вкладам в рублях.

4.2. Конверсия валюты и наращение процентов

В некоторых финансовых операциях совмещаются конверсионные операции с валютой и операции наращения.

Под ***валютой*** понимаются денежные знаки иностранных государств, а также кредитные и платежные документы, выраженные в иностранных денежных единицах и применяемые в межгосударственных расчетах.

Свободно конвертируемая валюта (СКВ) – валюта, свободно обменивающаяся на любую иностранную валюту по действующему курсу обмена.

Обменный курс показывает, сколько денежных единиц валюты своей страны можно получить в обмен на единицу иностранной валюты, т. е. это цена иностранной валюты, выраженная в единицах отечественной валюты.

В настоящее время в российских банках проводится обмен рублевых средств на СКВ различных стран. Поэтому в некоторых случаях возникает задача определения выгоды от размещения денежных средств на рублевых или валютных депозитах с учетом предлагаемых банками процентных ставок. Или же возникает вопрос: стоит ли конвертировать рубли в СКВ, чтобы использовать ожидаемое изменение валютного курса и различие процентных ставок. В операциях наращения с конверсией валюты существуют два источника дохода: изменение курса и наращение процентов.

Процентная ставка по депозитам обычно фиксирована. Курсы различных СКВ в настоящее время имеют тенденцию как к повышению, так и к снижению. Поэтому двойное конвертирование валюты может быть выгодным или убыточным.

Для вывода формулы наращения с учетом конверсии валюты введем обозначения:

P_v – денежная сумма в СКВ;

P_r – денежная сумма в рублях;

S_v – наращенная сумма в СКВ;

S_r – наращенная сумма в рублях;

K_0 – курс обмена в начале операции;

K_1 – курс обмена в конце операции;

n – срок депозита;

i – процентная ставка для депозита в рублях;

j – процентная ставка для депозита конкретного вида СКВ.

Рассмотрим две операции наращения с конверсией валют.

$$\textbf{1. } \mathbf{P_v\ (СКВ)} \xrightarrow{\text{конверсия}} \mathbf{P_r\ (р.)} \xrightarrow[(\,i\,)]{\text{наращение}} \mathbf{S_r\ (р.)} \xrightarrow{\text{конверсия}} \mathbf{S_v\ (СКВ)}$$

Операция включает три этапа:

1) конверсия СКВ в рубли;

2) наращение процентов по процентной ставке для депозитов в рублях;

3) конверсия денежной суммы в рублях в СКВ.

Эти три этапа соответствуют трем сомножителям в формуле наращения с конверсией валюты:

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}, \tag{32}$$

где K_0 – курс покупки СКВ в начале операции; K_1 – курс продажи СКВ в конце операции.

Множитель наращения с учетом двойного конвертирования

$$MH = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{(1 + ni)}{K_1 / K_0} = \frac{(1 + ni)}{k}, \tag{33}$$

где $k = K_1 / K_0$ – соотношение курсов валюты.

В выражении (33) наглядно представлено взаимодействия двух факторов: наращения и роста валюты. Если с ростом процентной ставки множитель линейно увеличивается, то рост курса валюты его уменьшает.

Определим доходность рассматриваемой операции в виде эффективной процентной ставки

$$i_{ef} = \frac{S_v - P_v}{P_v n} = \frac{P_v \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) - P_v}{P_v n} = \frac{\frac{(1 + ni)}{K_1 / K_0} - 1}{n} = \frac{\frac{(1 + ni)}{k} - 1}{n}. \tag{34}$$

Зависимость эффективной ставки от соотношения курсов валюты представлена на рис. 6

На графике можно отметить три области:

1) при $k < 1$ $\quad i_{ef} > i$;

2) при $k = 1$ $\quad i_{ef} = i$;

3) при $k > 1$ $\quad i_{ef} < i$.

Очевидно, что эффективность рассматриваемой операции с двойным конвертированием снижается при росте соотношения курса валют.

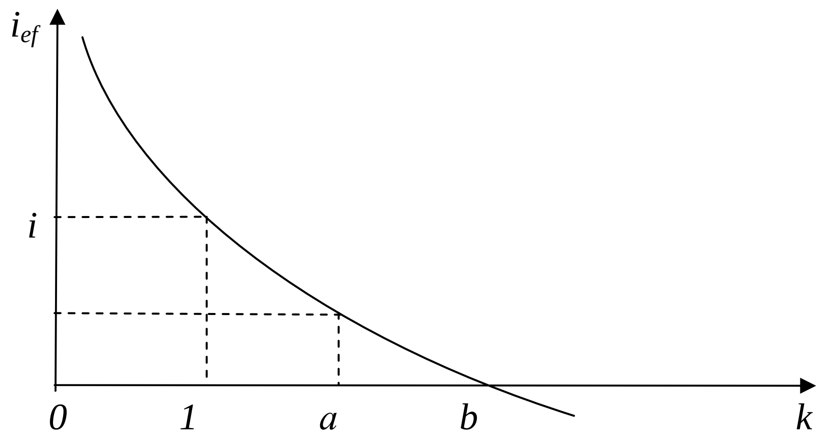


Рис. 6. Зависимость эффективной ставки от соотношения курсов валют (при операции: СКВ → р. (конверсия)→ р. (наращение) → СКВ)

Когда стоит перед вкладчиком вопрос: вложить сумму в долларах непосредственно на валютный депозит под процентную ставку j или конвертировать в рубли и разместить на рублевой депозит под процентную ставку i, необходимо определить практическое значение отношения курса валют k^*, при котором i_{ef} будет равна нулю.

Из (34) следует, что

$$k^* = 1 + ni. \tag{35}$$

Это означает, что

$$K_1^* = K_0(1 + ni). \tag{36}$$

Из представленных выражений можно сделать вывод, что, если ожидаемые значения k и K_1 превышают свои критические значения, то операция явно убыточная.

Так как в момент заключения контракта величина K_1 является неизвестной, то возникает задача определения ее максимально допустимого значения, при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в СКВ и применение двойного конвертирования не даст никакой дополнительной выгоды. Расчетная формула выводится из соотношения множителей наращения:

$$(1 + nj) = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni).$$

Отсюда

$$K_{1(\max)} = K_0 \frac{1 + ni}{1 + nj}. \tag{37}$$

П р и м е р

Что выгоднее: поместить 1 000 $ на валютный депозит под ставку *j = 6 % годовых или на рублевый депозит под ставку i = 16 % годовых на 1 год? Курс продаж валюты на начало операции 31,5 р./долл., ожидаемый курс покупки валюты на конец операции – 32,7 р./долл.*

Прямое наращение исходной долларовой суммы на валютном депозите дает величину

$$S_v = 1\ 000(1 + 1 \cdot 0{,}16) = 1\ 060 \ \text{долл.}$$

При наращении с двойным конвертированием получим сумму

$$S_v = 1\ 000 \cdot \frac{31{,}5}{32{,}7}(1 + 1 \cdot 0{,}16) = 1\ 117{,}421 \ \text{долл.}$$

Критическое значение курса покупки валюты в конце операции составит: $K_1^* = 31{,}5(1 + 1 \cdot 0{,}16) = 36{,}54 \ \text{р./долл.}$

Так как ожидаемый курс K_1 ниже критического значения, то доходность операции с двойным конвертированием положительная.

Максимально допустимое значение курса валюты определяется из формулы (37):

$$K_{1(\max)} = 31{,}5\frac{1 + 1 \cdot 0{,}16}{1 + 1 \cdot 0{,}06} = 34{,}47 \ \text{р./долл.}$$

Так как ожидаемый курс K_1, ниже максимально допустимого значения, то операция с двойным конвертированием является более выгодной, чем вложение средств на валютный депозит.

Эффективная годовая процентная ставка для операции с конверсией валюты определится из соотношения (34):

$$i_{ef} = \frac{\frac{32{,}7}{31{,}5}(1 + 0{,}16) - 1}{1} = 0{,}1174 \ (11{,}74\ \%).$$

Таким образом, эффективная ставка, отражающая доходность финансовой операции с учетом двойной конверсии валюты, составит 11,74 %.

2. $\mathbf{P_r}$ **(р.)** $\xrightarrow{\text{конверсия}}$ $\mathbf{P_v}$ **(СКВ)** $\xrightarrow[(j)]{\text{наращение}}$ $\mathbf{S_v}$ **(СКВ)** $\xrightarrow{\text{конверсия}}$ $\mathbf{S_r}$ **(р.)**

Для данного варианта трем этапам финансовой операции соответствуют три сомножителя в следующей формуле:

$$S_r = P_r \frac{1}{K_0}(1 + nj)K_1 = P_r \frac{K_1}{K_0}(1 + nj). \qquad (38)$$

Множитель наращения в этом случае равен:

$$MH = \frac{K_1}{K_0}(1 + nj). \qquad (39)$$

Из этого соотношения следует, что множитель наращения линейно зависит как от процентной ставки, так и от отношения курса валют.

Эффективная процентная ставка, определяющая доходность операции,

$$i_{ef} = \frac{S_r - P_r}{P_r n} = \frac{P_r \frac{K_1}{K_0}(1+nj) - 1}{P_r n} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1+nj) - 1}{n}. \qquad (40)$$

Графически зависимость показателя эффективности от соотношения курса валют изображена на рис. 7.

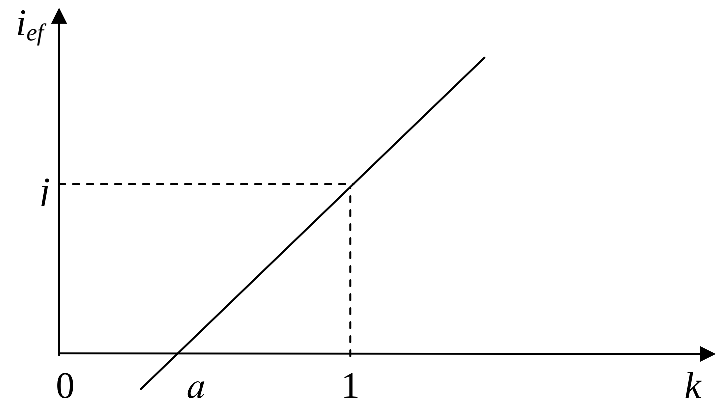


Рис.7. Зависимость эффективной ставки от курса валют
(при операции: р. → СКВ (конверсия)→ СКВ (наращение) → р.)

На графике можно отметить три области:

1) при $k < 1$ $i_{ef} > j$;

2) при $k = 1$ $i_{ef} = j$;

3) при $k > 1$ $i_{ef} < j$.

Из выведенной зависимости (40) следует, что эффективность операции тем выше, чем выше динамика курса валют. Из рассматриваемого соотношения можно вывести критическое значение k^*, соответствующее i_{ef} = 0:

$$k^* = \frac{1}{1+nj}. \qquad (41)$$

Откуда курс критической продажи валюты в конце операции

$$K_1^* = \frac{K_0}{1+nj}. \qquad (42)$$

Минимально допустимое значение курса продажи валюты в конце операции, определяющее выгодность двойного конвертирования по сравнению с вложением денежных средств на рублевый депозит, определяется из равенства множителей наращения:

$$\left(1+ni\right)=\frac{K_1}{K_0}\left(1+nj\right).$$

Откуда

$$K_{1(\min)}=K_0\frac{1+ni}{1+nj}. \qquad (43)$$

Пример

Вкладчик имеет сумму 100 тыс. р. Следует оценить выгодность вложения денежных средств на 1 год на рублевой депозит под процентную ставку i = 16 % годовых и с конверсией рублевой суммы в долларовую и ее вложение под процентную ставку j = 6 % годовых.

Курс покупки валюты в начале операции – 32,1 р./долл., ожидаемый курс продажи валюты в конце операции – 32,4 р./долл.

Наращенная сумма на рублевом депозите через 1 год составит

$$S_r=100(1+1\cdot 0{,}16)=116 \text{ тыс. р.}$$

При конвертировании валюты в конце срока будет получена наращенная сумма

$$S_r^1=100\frac{32{,}5}{32{,}1}\left(1+1\cdot 0{,}06\right)=107{,}32 \text{ тыс. р.}$$

Критическое значение курса валюты в конце операции, определяющее положительную доходность:

$$K_1^*=\frac{K_0}{1+nj}=\frac{32{,}1}{1+1\cdot 0{,}06}=30{,}28 \ {}^{р.}\!/_{долл.}$$

Это значит, что любой курс валюты в конце операции, превышающий $K_1^*=30{,}28$ *р./долл., обеспечит доходность вложения денежных средств.*

Минимально допустимое значение курса продажи валюты в конце операции

$$K_{1(\min)}=32{,}1\frac{1+1\cdot 0{,}16}{1+1\cdot 0{,}06}=35{,}12 \ {}^{р.}\!/_{долл.}.$$

Так как ожидаемый курс валюты на конец срока меньше $K_{1(min)}$*, то применение конверсии менее выгодно, чем вложение денежной суммы в рублях.*

Эффективность финансовой операции с конверсией валюты определяется из соотношения (38):

$$i_{ef}=\frac{\frac{32{,}5}{32{,}1}\left(1+1\cdot 0{,}06\right)-1}{1}=0{,}0732 \ (7{,}32 \ \%).$$

Таким образом, эффективная процентная ставка рассмотренной *финансовой операции составляет 7,32 %, в то время как доходность рублевого депозита обеспечивается банком процентной ставкой 16 % годовых.*

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Как влияет налог на проценты при наращении простыми процентами на процентную ставку?*
2. *Как рассчитать эффективную годовую сложную процентную ставку с учетом уплаты налога на проценты?*
3. *Каков порядок исчисления налога на начисленные проценты в нашей стране сегодня?*
4. *По каким формулам определяются наращенные суммы с учетом конверсии валюты по двум схемам?*
5. *Как определить критическое значение курса валюты в конце финансовой операции?*
6. *В чем сущность эффективной процентной ставки и как ее рассчитать?*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (24)–(41), решите следующие задачи с объяснением полученных результатов.

4.1. Определите номинальную эффективную ставку простых и сложных процентов при ежемесячном начислении процентов по номинальной процентной ставке банка *i* % для депозита сроком на один год, если ставка налога на проценты 15 %. Исходные данные представлены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	*i, %*	*Номер варианта*	*i, %*	*Номер варианта*	*i, %*	*Номер варианта*	*i, %*	*Номер варианта*	*i, %*	*Номер варианта*	*i, %*
1	40	***6***	35	***11***	47	***16***	37	***21***	26	***26***	23
2	42	***7***	44	***12***	36	***17***	42	***22***	25	***27***	27
3	45	***8***	43	***13***	30	***18***	33	***23***	24	***28***	39
4	48	***9***	49	***14***	38	***19***	32	***24***	31	***29***	42
5	46	***10***	41	***15***	34	***20***	28	***25***	22	***30***	46

4.2. Определите эффективность вложения денежных средств с конверсией валюты по двум вариантам: на валютный и рублевый депозиты. Процентные ставки по депозитным операциям и курсы обмена валют на начало финансовой операции возьмите на основе предлагаемых выбранным вами коммерческим банком сегодня. Ожидаемые курсы покупки и продажи валют на конец финансовой операции спрогнозируйте самостоятельно.

5. НАРАЩЕНИЕ С УЧЕТОМ ИНФЛЯЦИИ

5.1. Показатели инфляции

Под ***инфляцией*** понимается обесценение денег вследствие выпуска их в обращение в размерах, превышающих потребности товарооборота, что сопровождается повышением общего уровня цен на товары и услуги.

Основополагающим признаком инфляции является рост цен в среднем: не увеличение цены какого-либо отдельного товара или группы товаров, а увеличение усредненной цены всей номенклатуры товаров и услуг, выбранных в качестве базы выявления уровня инфляции.

Инфляцию характеризуют следующие основные показатели: индекс цен, темп инфляции, индекс покупательной способности денег.

Индекс цен (индекс инфляции) – показатель, выражающий относительное изменение среднего уровня цен товаров и услуг во времени.

Индекс цен *(price index)* определяется как отношение стоимостей фиксированного набора товаров и услуг (выбранных в качестве базы выявления уровня инфляции) в текущем периоде к стоимости товаров и услуг в предшествующем:

$$I_p = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{44}$$

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Одним из главных показателей, характеризующих уровень инфляции, является ***индекс потребительских цен*** *(consumer price index)*, характеризующий изменение во времени общего уровня цен на товары и услуги, непроизводственного потребления («потребительской корзины»).

Индекс потребительских цен используется в целях осуществления государственной финансовой политики, анализа и прогноза ценовых процессов в экономике, регулирования реального курса национальной валюты, пересмотра минимальных социальных гарантий, решения правовых вопросов. Индекс потребительских цен используется при пересчете показателей системы национальных счетов из текущих в постоянные цены.

Динамика индекса цен за несколько лет отражает изменения, происходящие в инфляционных процессах. Повышение индекса цен за рассматриваемый период по сравнению с предыдущим, указывает на ускорение инфляции, снижение же соответственно указывает на уменьшение ее темпов.

Темп инфляции *(inflation rate)* показывает, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период. Темп инфляции определяется как относительный прирост цен за период:

$$h = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Проведем преобразования:

$$h = \frac{P_t}{P_{t-1}} - \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

Таким образом, получим

$$h = I_p - 1. \qquad (45)$$

Из формулы следует выражение индекса цен через известный темп инфляции:

$$I_p = 1 + h. \qquad (46)$$

Темп инфляции выражается в процентах, однако при проведении расчетов в формулу (46) следует подставлять темп инфляции, выраженный десятичной дробью.

П р и м е р

Годовой темп инфляции равен 12 %. Определить годовой индекс инфляции.

Используя формулу (44), получим: $I_p = 1 + 0{,}12 = 1{,}12$.

Полученный результат показывает, что цены за год вырастут в 1,12 раза.

Индекс покупательной способности денег характеризует изменение объема материальных благ (услуг), который можно получить за одинаковую сумму денег. Исчисляется как величина, обратная индексу цен:

$$I_{п.с} = \frac{1}{I_p}. \qquad (47)$$

Таким образом, индекс покупательной способности денежной единицы определяет обесценение денег вследствие инфляции.

Если наращенная денежная сумма составляет по номиналу величину S, то реальная сумма с учетом ее обесценения определяется как

$$C = S \cdot I_{п.с}.$$

П р и м е р

В США при определении индекса цен 1967 г. принят за базисный. В 1985 г. индекс цен составил $I_p = 3{,}22$, т. е. цены увеличились в 3,22 раза по сравнению с 1967 г. Индекс покупательной способности денег $I_{п.с} = 1/3{,}22 = 0{,}3104$ (31,04 %). Это значит, что реальная покупательная способность 1долл. в 1985 г. составила 31,04 % по сравнению с 1967 г.

5.2. Расчет индекса цен за отдельные периоды

Индексы цен являются ценными индексами. Индекс цен за данный период показывает, во сколько раз выросли цены в среднем по отношению к уровню цен предыдущего периода.

Рассмотрим цепной процесс увеличения цен за отдельные месяцы года, представленный на рис. 8.

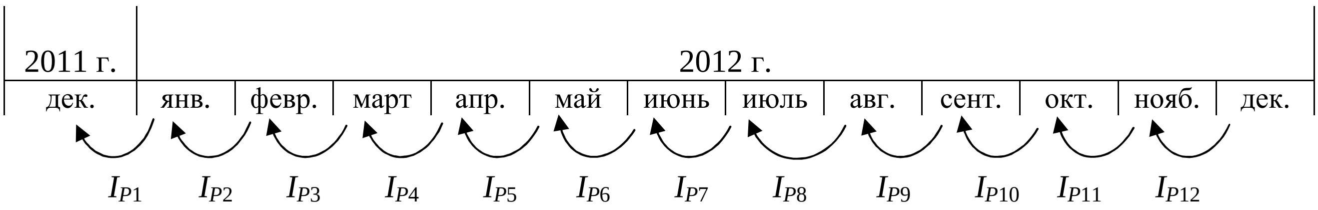


Рис. 8. Цепной процесс изменения цен при инфляции

Месячные индексы цен показывают, во сколько раз возросли цены в каждом текущем месяце по сравнению с предыдущим. Например, в январе цены выросли по сравнению с декабрем прошлого года в I_{P1} раз, в феврале по сравнению с январем – в I_{P2} раз и т. д.

Таким образом, индекс цен за год определяется как произведение индексов цен за 12 месяцев:

$$I_{p(год)} = I_{p1} \cdot I_{p2} \cdots I_{p12} = \frac{P_1}{P_{12}^0} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdots \frac{P_{12}}{P_{11}} = \prod_{i=1}^{12} I_{pi}\,. \tag{48}$$

Если известны темпы инфляции за отдельные месяцы года, то годовой индекс цен рассчитывается по формуле

$$I_{p(год)} = \prod_{i=1}^{12} (1 + h_i)\,. \tag{49}$$

Аналогично можно определить индексы цен за отдельные кварталы года:

$$I_{p(кв)} = \prod_{i=1}^{3} I_{pi} = \prod_{i=1}^{3} (1 + h_i)\,. \tag{50}$$

П р и м е р

Темпы инфляции за первые три месяца года составили соответственно 3, 5 и 7 %. Тогда индекс цен за 1-й квартал определяется как произведение индексов цен за отдельные месяцы:

$$I_{P(кв)} = (1 + 0{,}03)\cdot(1 + 0{,}05)\cdot(1 + 0{,}07) = 1{,}1572.$$

Темп инфляции за 1-й квартал

$$h_{кв} = I_P - 1 = 1{,}1572 - 1 = 0{,}1572\ (15{,}72\ \%).$$

Таким образом, в первом квартале цены выросли в 1,1572 раза или на 15,72 %.

Очевидно, что общая формула расчета индекса цен за k периодов:

$$I_p^k = \prod_{i=1}^{k} I_{pi} = \prod_{i-1}^{k} (1 + h_i) . \qquad (51)$$

Если известен годовой индекс цен, то среднемесячный индекс цен определяют по ***формуле средней геометрической***:

$$\bar{I}_{p(мес)} = \sqrt[12]{I_{p(год)}} . \qquad (52)$$

Если задаются постоянные ожидаемые (прогнозируемые) среднемесячные темпы инфляции $\bar{h}_{(мес)}$, то годовой индекс цен определяется как

$$I_{p(год)} = \left(\bar{I}_{p(мес)}\right)^{12} = \left(1 + \bar{h}_{мес}\right)^{12} . \qquad (53)$$

Годовой темп инфляции $h_{(год)}$ определяется из соотношения

$$h_{год} = I_{p(год)} - 1. \qquad (54)$$

Индексы цен за квартал и полугодие определятся из формул

$$I_{p(кв)} = \left(\bar{I}_{p(мес)}\right)^{3} = \left(1 + \bar{h}_{мес}\right)^{3} ; \qquad (55)$$

$$I_{p(п/г)} = \left(\bar{I}_{p(мес)}\right)^{6} = \left(1 + \bar{h}_{мес}\right)^{6} . \qquad (56)$$

Результаты вычислений годового индекса инфляции для некоторых значений среднемесячных темпов инфляции представлены в табл. 21.

Таблица 21

Значения годового индекса инфляции

$\bar{h}_{мес}$	1 %	3 %	5 %	8 %	10 %	15 %	20 %	28 %
$I_{P(год)}$	1,127	1,426	1,796	2,518	3,138	5,350	8,916	19,343
$h_{год}$	12,7 %	42,6 %	79,6 %	151,8 %	213,8 %	435,0 %	791,6 %	1834,3 %

Из табл. 21 видно, что при среднемесячном темпе инфляции 10 % за год цены увеличиваются более чем в 3,1 раза или на 210 %, так как $h_{год}$ = 3,1 – 1 = 2,1 (210 %).

Если за временной интервал t была получена некоторая наращенная сумма S, а индекс цен за время финансовой операции составил величину I_P, то эта денежная сумма с учетом ее обесценения составит

$$C = \frac{S}{I_p} . \qquad (57)$$

Заметим, что при расчетах индекс цен должен соответствовать периоду наращения.

5.3. Учет инфляции при наращении простых процентов

Пусть на первоначальную денежную сумму P начисляются простые проценты по ставке i в течение n лет и индекс цен за это время равен $I_{p(n)}$.

Тогда наращенная сумма с учетом ее обесценения

$$C = \frac{S}{I_{p(n)}} = \frac{P(1+ni)}{I_{p(n)}}. \qquad (58)$$

Множитель наращения простых процентов с учетом инфляции

$$MH = \frac{1+ni}{I_{p(n)}}. \qquad (59)$$

П р и м е р

При годовой инфляции в 20 % первоначально вложенная на депозит сумма 50 тыс. р. Через год наращенная сумма (без учета инфляции) по ставке 20 % годовых определится как

$$S = 50(1+1\cdot 0.2) = 60 \ \textit{тыс. р.}$$

Эта сумма по своей покупательной способности в ценах на текущий момент составит величину

$$C = \frac{60}{(1+0{,}2)} = 50 \ \textit{тыс. р.}$$

Следовательно, наращение только компенсировало действие инфляции, и с учетом покупательной способности рубля наращенная сумма равна первоначально вложенной сумме.

Из формулы (59) следует, что увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место тогда, когда МН > 1, т. е. $1+i > I_p^{(n)}$. Если МН = 1, т. е. $1+ni = I_{p(n)}$, то наращение только компенсирует действие инфляции. В этом случае можно найти минимально допустимую (барьерную) ставку:

$$i* = \frac{I_{p(n)} - 1}{n}. \qquad (60)$$

Если n = 1, то $i^* = h_{год}$. Эта ставка условно разделяет ось значений процентных ставок на 2 части: положительной и отрицательной доходности (рис. 9).

В условиях инфляции для роста первоначального капитала необходимо исходную процентную ставку с течением времени постоянно увеличивать, т. е. производить индексацию процентной ставки. Такую новую ставку r с поправкой на инфляцию в финансовой литературе условно называют ***брутто-ставкой*** (а исходную – ***нетто-ставкой***).

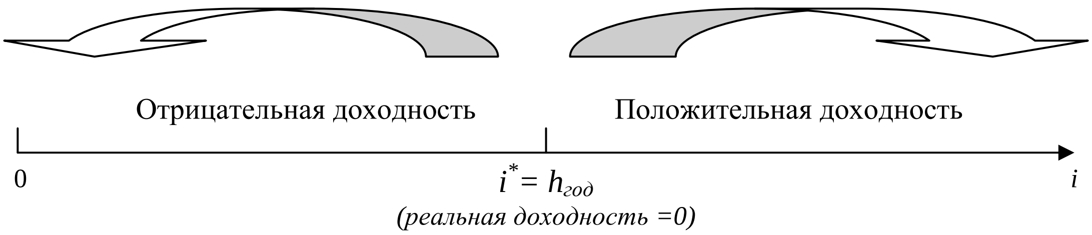


Рис. 9. Области положительной и отрицательной доходности финансовых операций

Для обеспечения полной компенсации негативного действия инфляции и получения доходности с учетом нетто-ставки i размер брутто-ставки определяется из равенства

$$1+ni=\frac{1+nr}{I_{p(n)}}. \tag{61}$$

Откуда брутто-ставка

$$r=\frac{1}{n}\left[\left(1+ni\right)I_{p(n)}-1\right]. \tag{62}$$

П р и м е р

Определить кредитную ставку при условии, что банк закладывает в кредитную операцию доходность 5 % годовых. Годовой уровень инфляции составляет 12 %.

Индекс цен за этот период (см. формулу (46)) составит I_p = 1,12. Расчет кредитной ставки проводится по формуле (62):

$$r=\frac{1}{1}\left[\left(1+1\cdot 0{,}05\right)1{,}12-1\right]=0{,}176\ \ (17{,}6\ \%).$$

Таким образом, простая годовая брутто-ставка, равная r = 17,6 %, не только компенсирует инфляцию, но и обеспечивает доходность, равную 5 % годовых.

Если задана норма доходности брутто-ставкой r, можно определить реальную процентную ставку i с учетом инфляции из соотношения (61):

$$i=\frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{I_{p(n)}}-1\right). \tag{63}$$

При расчете нужно учитывать значение индекса цен, охватывающего весь период начисления процентов.

Из формулы (63) следует, что реальная процентная ставка может иметь отрицательное значение. Это возможно в том случае, если инфляция «обгоняет» номинальную процентную ставку (и даже брутто-ставку).

Положительной ставка i может быть только при условии

$$\frac{1+nr}{I_{p(n)}} > 1.$$

П р и м е р

Определить реальную доходность депозита, если банком предложена ставка 10 % годовых при годовом уровне инфляции 12 %.

Годовой индекс инфляции вычисляется по формуле (46) и составит I_p = 1,12. Так как депозитная ставка ниже годового уровня инфляции, то реальная доходность будет отрицательной. Докажем это расчетом по формуле (63):

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{I_{p(n)}} - 1\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{1+1\cdot 0{,}1}{1{,}12} - 1\right) = -0{,}018\ \ (-1{,}8\ \%).$$

Таким образом, реальная доходность депозита отрицательна и составляет – 1,8 %.

Так, отрицательная процентная ставка была в России в 1992–1993 гг. при гиперинфляции.

П р и м е р

В 1993 г. в России при вложении денег на рублевый депозит даже под 500 % годовых не следовало ожидать большой наращенной суммы. Инфляция в то время составляла примерно 900 %.

Учитывая значения h = 900 % (h = 9), r = 5, n = 1, по формуле (63) получим

$$i = \frac{1}{1}\left(\frac{1+1\cdot 5}{1+9} - 1\right) = -\ 0{,}4\ \ (-\ 40\ \%).$$

Таким образом, инфляция уничтожит 40 % реальной стоимости капитала, и к концу года фактически останется 60 % от первоначальной стоимости вклада.

Таким образом, в финансово-экономических расчетах при учете инфляции различаются следующие виды процентных ставок:

– ***номинальная процентная ставка*** – исходная базовая процентная ставка, указываемая в договорах. Доходность, определяемая по этой ставке, не будет скорректирована на инфляцию;

– ***реальная процентная ставка*** – процентная ставка, определяющая доходность финансовой операции с учетом инфляции. Характеризует снижение покупательной способности денег. В условиях инфляции реальная процентная ставка всегда меньше номинальной и может иметь отрицательное значение. При положительной реальной процентной ставке будет происходить реальное увеличение стоимости капитала. При отрицательной реальной процентной ставке первоначально вложенный капитал обесценивается, т. к. инфляция «съедает» реальную стоимость вклада;

– ***брутто-ставка*** – это процентная ставка с поправкой на инфляцию, полученная путем индексации нетто-ставки наращения. Брутто-ставка превышает номинальную процентную ставку и, как правило, имеет положительное значение.

В условиях ***галопирующей*** инфляции используется плавающая процентная ставка, значение которой изменяется через определенные интервалы времени.

В условиях ***гиперинфляции*** любая финансовая сделка из-за чрезвычайного обесценения денег лишена смысла.

При ***умеренной (ползучей)*** инфляции, когда цены медленно, но постоянно растут, есть возможность ориентироваться в экономической обстановке, подготовиться к предстоящему повышению цен, спрогнозировать течение инфляционного процесса и, хотя бы частично скорректировать его негативные последствия.

5.4. Наращение по сложным процентам с учетом инфляции

При расчетах процентов по сложной процентной ставке наращенная сумма с учетом обесценения

$$C = P\frac{(1+i)^n}{\left(I_{p(год)}\right)^n} = P\frac{(1+i)^n}{(1+h_{год})^n}.$$

Отсюда

$$C = P\left(\frac{1+i}{1+h_{год}}\right)^n. \qquad (64)$$

Величина $MH = \left(\frac{1+i}{1+h_{год}}\right)^n$ представляет собой множитель наращения по сложным процентам с учетом инфляции, где $h_{год}$ – ожидаемый среднегодовой темп инфляции за период *n* лет.

Минимально допустимая (барьерная) процентная ставка, при которой наращение только компенсирует инфляцию:

$$i^* = h_{год}.$$

Влияние темпа инфляции и величины процентной ставки на рост реальной суммы денег наглядно представлено на рис. 10.

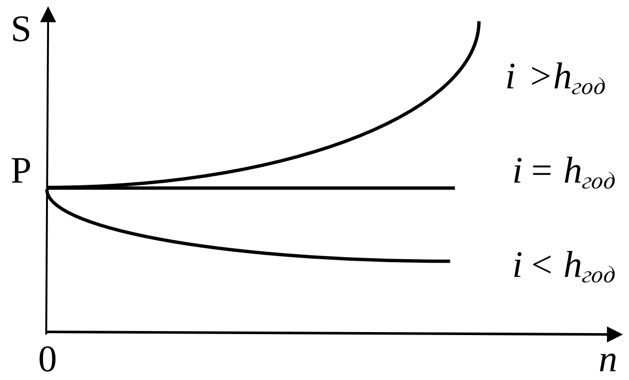


Рис. 10. Изменение реальной суммы денег при различных соотношениях темпов инфляции и сложной процентной ставки

При инфляционных процессах возможны три варианта соотношений среднегодового темпа инфляции и сложной процентной ставки:

1) если $i = h_{год}$, то реальный рост денежной суммы не происходит: наращение поглощается инфляцией;

2) если $i < h_{год}$, то инфляция «съедает» не только проценты, но и часть первоначально вложенной суммы: наблюдается «эрозия» капитала;

3) если $i > h_{год}$, то происходит реальный рост первоначально вложенной суммы денег.

Брутто-ставку при начислении сложных процентов найдем из равенства

$$(1+i)^n = \left(\frac{1+r}{1+h_{год}}\right)^n, \tag{65}$$

где i – ставка реальной доходности финансовой операции; $h_{год}$ – средний годовой темп инфляции за рассматриваемый период n; r – ставка с поправкой на инфляции (брутто-ставка, указываемая в договоре).

Из выражения (65) следует

$$(1+r) = (1+i)(1+h_{год}).$$

После преобразования получим формулу расчета брутто-ставки с учетом инфляции:

$$r = i + \underbrace{h_{год} + h_{год} \cdot i}_{\text{Инфляционная премия}}. \tag{66}$$

Эта формула носит название ***«формула Фишера»***.

Величина $h_{год} + h_{год} \cdot i$ называется инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь.

На практике иногда брутто-ставку рассчитывают по упрощенной формуле

$$r = i + h_{год}, \qquad (67)$$

т. к. последнее слагаемое в формуле Фишера при незначительных величинах i и $h_{год}$ имеет малое значение и им можно пренебречь.

Решим обратную задачу: определим доходность финансовой операции с учетом инфляции в виде реальной процентной ставки по заданному значению брутто-ставки, используя соотношение (65):

$$i = \frac{1+r}{1+h_{год}} - 1. \qquad (68)$$

После приведения выражения (68) к общему знаменателю получим

$$i = \frac{r - h_{год}}{1+h_{год}}. \qquad (69)$$

Упрощенная формула ставки реальной доходности

$$i = r - h_{год}. \qquad (70)$$

Показатель доходности здесь не зависит от срока начисления процентов.

Формулой (70) пользуются в случае приближенных расчетов и небольших уровнях инфляции.

Положительной ставка i может быть только при условии

$$r > h_{год}.$$

Если начисление сложных процентов производится не один раз в году, а m раз (ежеквартально, ежемесячно), то наращенная сумма с учетом инфляции

$$C = P\frac{(1 + {}^{j}/_{m})^{mn}}{(I_{p(год)})^{n}}. \qquad (71)$$

Положительная процентная ставка определяется из неравенства

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} > \left(I_{p(год)}\right)^{n}.$$

Откуда вытекает формула расчета значения минимально допустимой барьерной процентной ставки

$$j^{*} = m(\sqrt[m]{I_{p(год)}} - 1). \qquad (72)$$

Следовательно, любая ставка, превышающая значение j^{*}, будет являться положительной процентной ставкой.

Брутто-ставку при начислении сложных процентов m раз в году найдем из равенства

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}=\frac{(1+{}^{r}\!/\!{}_{m})^{mn}}{(I_{p(год)})^{n}}.$$

После преобразований получим формулу для вычисления брутто-ставки:

$$r=m\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[m]{I_{p(год)}}-1\right]. \tag{73}$$

По известному значению брутто-ставки можно определить реальную ставку доходности *i* при начислении сложных процентов:

$$i=m\left(\frac{1+{}^{r}\!/\!{}_{m}}{\sqrt[m]{I_{p(год)}}}-1\right). \tag{74}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Что понимают под инфляцией? Какими показателями она характеризуется?*
2. *Как связаны индекс цен и темп инфляции? Какова экономическая интерпретация этих понятий?*
3. *Как определить общий индекс цен за время, охватывающее ряд периодов, в которых индексы цен были различны?*
4. *Как определяется наращенная сумма с учетом ее обесценения в результате инфляции при начислениях простых и сложных процентов?*
5. *Что понимают под номинальной процентной ставкой?*
6. *Как определить минимально допустимую (барьерную) ставку?*
7. *Что понимают под реальной процентной ставкой? Как ее определить?*
8. *Что характеризует брутто-ставка? Из каких условий получают формулу ее расчета?*
9. *Назовите три возможных варианта соотношений простой и сложной процентных ставок и среднегодового темпа инфляции. Что происходит с вложенным капиталом в каждом варианте?*
10. *Какой показатель определяет доходность финансовой операции при инфляции?*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (44)–(74), решите следующие задачи с объяснением полученных результатов.

5.1. Известны темпы инфляции за отдельные месяцы года. На основе исходных данных табл. 22 определите годовые индекс и темп инфляции, среднеквартальные индекс и темп инфляции, среднемесячные индекс и темп инфляции.

Таблица 22

Номер варианта	*Месячные темпы инфляции, %*											
	Месяц											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	2	4	4	6	7	5	6	8	9	10	11	10
2	1	2	5	6	8	10	12	8	7	10	12	14
3	3	5	4	8	5	9	13	16	15	14	10	12
4	1	2	6	6	8	10	8	12	14	15	18	20
5	4	5	4	5	6	7	10	11	12	12	16	18
6	5	4	3	5	8	8	12	13	14	12	8	10
7	8	9	10	11	10	9	12	11	13	12	10	12
8	2	3	4	5	6	6	8	9	8	9	10	9
9	1	2	1	3	4	3	5	6	5	8	7	7
10	2	3	2	4	2	3	4	4	5	6	8	10
11	3	4	5	4	6	8	7	9	11	10	12	14
12	4	3	4	5	8	7	9	8	10	12	10	14
13	5	6	7	8	8	9	9	10	11	10	8	11
14	6	7	6	7	9	10	11	11	14	16	17	18
15	2	4	5	6	7	8	8	9	12	14	15	17
16	5	4	7	9	10	8	7	8	9	8	11	12
17	4	5	4	6	6	5	6	9	7	6	7	10

18	2	3	2	3	4	6	8	8	10	11	12	13
19	3	3	4	3	6	8	9	10	8	6	7	9
20	4	4	6	7	7	9	10	9	8	6	6	8
21	2	3	5	5	6	8	6	8	10	9	3	5
22	3	2	3	5	5	8	8	6	4	5	9	10
23	7	8	9	9	10	7	8	4	5	6	6	8
24	6	7	7	8	6	7	4	7	8	10	8	10
25	4	6	5	7	9	10	6	5	6	8	9	11
26	5	5	6	6	7	9	8	5	7	9	1	6
27	3	5	8	8	10	10	9	8	6	7	8	9
28	2	3	4	5	5	5	7	8	10	12	12	13
29	4	6	6	9	10	13	11	10	8	9	8	12
30	8	9	9	10	10	12	13	13	14	12	12	14

5.2. На сумму P тыс. р. в течение трех месяцев начисляются простые проценты по ставке i % годовых. Последовательный прирост цен по месяцам в процентах составил h_1, h_2, h_3.

Определите:

1) индекс цен за три месяца;
2) фактическую наращенную сумму без учета инфляции;
3) наращенную сумму с учетом обесценения.

Исходные данные представлены в табл. 23.

Таблица 23

Номер вариата	*P, тыс. р.*	*i, %*	*h_1, %*	*h_2, %*	*h_3, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*i, %*	*h_1, %*	*h_2, %*	*h_3, %*
1	200	25	10	12	14	***16***	300	25	4	5	8
2	100	32	8	10	12	***17***	200	30	8	11	12
3	300	38	14	18	20	***18***	400	34	10	13	17
4	250	30	10	13	15	***19***	500	40	12	16	20
5	400	36	12	14	16	***20***	100	28	7	10	12
6	300	24	4	5	8	***21***	250	38	9	12	15
7	500	32	6	8	12	***22***	300	30	5	7	10
8	450	40	12	15	18	***23***	400	36	6	9	12
9	600	38	10	13	16	***24***	600	42	12	17	25
10	200	25	5	8	10	***25***	800	45	14	18	28
11	250	28	4	6	8	***26***	500	40	16	19	22
12	400	30	8	12	15	***27***	300	28	8	9	13
13	500	36	9	11	14	***28***	200	32	11	14	16
14	600	32	7	9	12	***29***	100	36	12	13	14
15	400	34	6	8	10	***30***	400	35	10	14	16

5.3. Задан прогнозируемый средний темп инфляции в месяц $\bar{h}_{мес}$ %. На основе исходных данных табл. 24 определите, к какому росту цен за год такой темп инфляции приведет и каков годовой темп инфляции.

Таблица 24

Номер варианта	$\bar{h}_{мес}$, %	*Номер варианта*	$\bar{h}_{мес}$, %	*Номер варианта*	$\bar{h}_{мес}$, %	*Номер варианта*	$\bar{h}_{мес}$, %	*Номер варианта*	$\bar{h}_{мес}$, %	*Номер варианта*	$\bar{h}_{мес}$, %
1	4	***6***	5	***11***	7	***30***	3	***21***	13	***26***	6
2	7	***7***	14	***16***	6	***17***	8	***22***	5	***27***	9
3	5	***8***	6	***13***	12	***18***	5	***23***	6	***28***	8
4	8	***9***	10	***14***	8	***19***	4	***24***	4	***29***	11
5	6	***10***	3	***17***	4	***20***	10	***25***	9	***30***	4

5.4. По заданному прогнозируемому уровню инфляции задачи 5.3 определите минимально допустимую (барьерную) ставку и брутто-ставку при начислении простых процентов при закладываемой в финансовую операцию реальной доходности 8 %.

5.5. На основе исходных данных табл. 25 определите реальную ставку простых процентов за год, если брутто-ставка равна *r* % при годовой инфляции $h_{год}$ %.

Таблица 25

Номер варианта	*r*, %	$h_{год}$, %	*Номер варианта*	*r*, %	$h_{год}$, %	*Номер варианта*	*r*, %	$h_{год}$, %
1	40	28	***11***	50	26	***21***	60	42
2	62	30	***12***	70	34	***22***	75	48
3	54	26	***13***	55	32	***23***	65	35
4	65	38	***14***	40	22	***24***	48	26
5	50	24	***15***	58	28	***25***	54	22
6	75	45	***16***	60	35	***26***	70	50
7	70	40	***17***	46	20	***27***	50	30
8	58	30	***18***	75	40	***28***	55	34
9	60	36	***19***	56	25	***29***	40	18
10	55	28	***20***	65	38	***30***	52	36

5.6. На вклад в *P* тыс. р. ежемесячно начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке *j* %.

На основе исходных данных табл. 26 требуется:

1) оценить сумму вклада через 1,5 года с точки зрения покупательной спо-

собности, если ожидаемый средний темп инфляции $\overline{h}_{мес}$ % в месяц;

2) определить величину положительной процентной ставки;

3) рассчитать брутто-ставку и дать ей объяснение.

Таблица 26

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*j, %*	$\overline{h}_{мес}$, *%*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*j, %*	$\overline{h}_{мес}$, *%*
1	200	36	4	***16***	600	38	6
2	550	46	5	***17***	100	42	4
3	800	52	8	***18***	300	48	5
4	650	34	2	***19***	150	45	4
5	450	50	3	***20***	400	35	7
6	700	35	4	***21***	650	38	3
7	100	45	6	***22***	800	44	6
8	750	38	4	***23***	500	48	4
9	250	48	5	***24***	200	40	3
10	600	52	8	***25***	750	38	5
11	850	34	6	***26***	900	32	2
12	400	46	3	***27***	550	36	3
13	150	40	4	***28***	700	46	5
14	500	36	5	***29***	250	50	8
15	300	50	7	***30***	450	40	6

5.7. Банк предлагает клиентам поместить деньги на депозит на один год по указанной в договоре номинальной процентной ставке. Проценты начисляются ежеквартально. Найдите реальную доходность такого предложения для клиентов банка, если ежемесячный индекс инфляции прогнозируется равным $I_{p(мес)}$.

Исходные данные представлены в табл. 27.

Таблица 27

Номер варианта	*Ставка, %*	$I_{p(мес)}$	*Номер варианта*	*Ставка, %*	$I_{p(мес)}$	*Номер варианта*	*Ставка, %*	$I_{p(мес)}$
1	34	1,02	***11***	40	1,03	***21***	42	1,05
2	40	1,06	***12***	32	1,06	***22***	40	1,02
3	36	1,04	***13***	45	1,04	***23***	32	1,04
4	48	1,07	***14***	38	1,05	***24***	48	1,06
5	32	1,05	***15***	34	1,03	***25***	42	1,02
6	44	1,06	***16***	38	1,02	***26***	44	1,03
7	38	1,04	***17***	44	1,07	***27***	40	1,05
8	36	1,02	***18***	40	1,04	***28***	36	1,02
9	38	1,03	***19***	46	1,06	***29***	42	1,06
10	44	1,05	***20***	30	1,02	***30***	46	1,04

5.8. На основе исходных данных табл. 28 найдите реальную ставку сложных процентов при годовом темпе инфляции $h_{год}$ % и брутто-ставке r %.

Таблица 28

Номер варианта	$h_{год}$, %	r, %	*Номер варианта*	$h_{год}$, %	r, %	*Номер варианта*	$h_{год}$, %	r, %
1	120	140	***11***	126	148	***21***	130	162
2	130	165	***12***	142	172	***22***	146	180
3	140	178	***13***	128	160	***23***	128	154
4	128	150	***14***	120	136	***24***	134	166
5	132	145	***15***	138	142	***25***	148	172
6	126	160	***16***	152	174	***26***	126	168
7	142	168	***17***	134	170	***27***	118	144
8	122	130	***18***	144	165	***28***	120	158
9	150	170	***19***	124	140	***29***	132	160
10	110	120	20	136	154	***30***	145	175

5.9. На какой срок при среднем месячном темпе инфляции $h_{мес}$ % необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под номинальную процентную ставку j % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась в 1,5 раза? Исходные данные возьмите из табл. 26.

5.10. Определите реальную доходность вложения денежных средств на депозит в Сбербанке РФ в современных условиях инфляции.

5.11. Постройте графики зависимости реальной доходности финансовой операции от брутто-ставки $i = f(r)$, если годовой уровень инфляции: а) $h_{год}$ = 8 %; б) $h_{год}$ = 10 %; в) $h_{год}$ = 12 %.

5.12. Определите процентные ставки по кредитам, устанавливаемые коммерческими банками в современных условиях инфляции, при заложенной в них реальной доходности: а) 7 %; б) 9 %.

5.13. Цепные индексы роста вложенного капитала за 3 года составили 1,41; 1,52; 1,64. Какова реальная доходность такого вложения денежных средств в виде годовой эффективной процентной ставки при среднегодовой инфляции 30 %?

5.14. Номинальная процентная ставка, лишь компенсирующая при наращении действие инфляции, составляет 36 % годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется ежемесячно.

5.15. Предприниматель получил в банке кредит на два года. В первый год инфляция составила 16 %, во второй – 24 %. Во сколько раз реальная сумма долга (по своей покупательной способности) к концу срока будет больше выданной банком суммы, если банк начислял ежемесячно сложные проценты по номинальной процентной ставке 30 % годовых?

5.16. Определите средний месячный уровень инфляции в России с 1991 г. по август 1997 г., если потребительские цены за этот период выросли в 6169 раз.

5.17. Фирме необходим кредит на сумму 600 тыс. р. сроком на три месяца. Годовая процентная ставка за кредит (без учета инфляции) – 48 %. Месячные уровни инфляции за три предыдущих месяца – 3,4 %; 2,5 %; 5,2 %. Кредит предоставляется с расчетом на средний уровень инфляции по трем предыдущим месяцам. Определите простую процентную ставку кредита и наращенную сумму.

5.18. Предприниматель получил в банке кредит на 2 года, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2 % от величины кредита. Определите действительную доходность для банка такой финансовой операции в виде годовой эффективной процентной ставки, если банк начисляет ежемесячно сложные проценты на исходную сумму кредита по номинальной процентной ставке 40 % годовых и прогнозируемый ежегодный темп инфляции составляет 30 %.

5.18. Фирма получила кредит на один месяц на сумму 4 млн. р. Реальная ставка доходности по кредиту – 12 % годовых. Проценты простые. Ожидаемый месячный уровень инфляции – 2 %. Определите, какую процентную ставку по кредитам применит банк, и наращенную сумму.

5.20. В первой половине 1997 г. в России средний месячный уровень инфляции составлял 5,9 %. Коммерческий банк в то время принимал вклады от населения под процентную ставку 54 % годовых. Проценты сложные и начислялись ежемесячно. Определите реальную процентную ставку доходности.

6. ДИСКОНТИРОВАНИЕ И БАНКОВСКИЙ УЧЕТ

6.1. Основные понятия

В финансовой практике часто приходится решать задачу, обратную задаче нахождения наращенной суммы. Общая формулировка задачи заключается в следующем: требуется определить величину P на некоторый момент времени при условии, что в будущем при начислении на нее процентов, она составит наращенную сумму S.

Такая задача возникает при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем, или, когда проценты удерживаются кредитором непосредственно при выдаче ссуды. В инвестиционном анализе решается задача определения величины инвестируемого капитала P сегодня по величине капитала S, который ожидается получить через n лет в будущем. Процессы наращения и дисконтирования представлены на рис. 11.

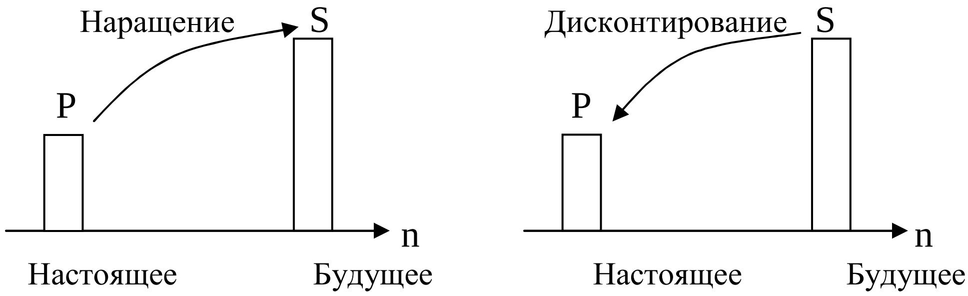


Рис. 11. Процессы наращения и дисконтирования

Дисконтирование – это способ определения стоимостной величины, относящейся к будущему, на любой более ранний момент времени. Такой прием часто называют приведением стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени (на сегодняшний день). Приведение стоимостных величин, которые будут произведены в будущем, может быть осуществлено на любой другой, в том числе, промежуточный момент времени. Таким образом, с помощью дисконтирования в финансовых вычислениях учитывается фактор времени.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, в зависимости от контекста, называют ***приведенной, современной, текущей, капитализированной*** стоимостью. Современная величина суммы денег является одним из важнейших понятий в количественном анализе финансовых операций.

При определении неизвестной величины P по наращенной денежной сумме S говорят, что денежная сумма S дисконтируется (или учитывается). Величину удержанных процентов называют ***дисконтом*** (*discount*).

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. При математическом дисконтировании применяют процентную ставку *i (interest base rate)*, а при банковском учете – учетную ставку *d (discount base rate)*. Проценты, начисляемые по процентной ставке, называются ***декурсивными***, а по учетной ставке – ***антисипативными***.

6.2. Дисконтирование по простой процентной ставке

Математическое дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной задаче наращения первоначальной суммы P. В случае начисления простых процентов решаются прямая задача – наращения, и обратная задача – дисконтирования. При этом используются следующие формулы расчета:

– прямая задача (задача наращения) $S = P(1 + ni)$;

– обратная задача (математическое дисконтирование)

$$P = \frac{S}{1 + ni} = S\frac{1}{1 + ni}. \quad (75)$$

В формуле (75) математического дисконтирования величину $DM = \frac{1}{1 + ni}$ называют ***дисконтным множителем (дисконт-фактором)*** или ***коэффициентом дисконтирования***.

Дисконтный множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма P в наращенной сумме S. Он представляет собой величину, обратную множителю наращения. Ставка i в дисконтном множителе называется ***ставкой дисконтирования*** или ***нормой дисконта***.

Разность S - P можно рассматривать не только как проценты, начисленные на первоначальную сумму P, но и как ***дисконт*** с суммы S. Формула определения дисконта в случае простых процентов

$$D = S - P = S - \frac{S}{1 - ni} = \frac{Sni}{1 + ni} = S(1 - DM).$$

Пример

Через полгода после заключения финансового соглашения о получении кредита должник обязан доплатить 42,8 тыс. р. Какова первоначальная величина кредита, если он выдан под 14 % годовых и начисляются простые проценты?

Расчет производится по формуле (75) с учетом, что $n = 0{,}5$ *года:*

$$P = \frac{S}{1 + ni} = \frac{42{,}8}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}14} = 40 \text{ тыс. р.}$$

Величина дисконта составляет: $D = S - P = 42{,}8 - 40 = 2{,}8$ *тыс. р.*

В данном случае величина дисконта равна величине начисленных процентов, т. е. дисконт определяется через процентную ставку.

Однако дисконт, понимаемый как скидка с конечной суммы долга, в некоторых финансовых операциях может быть установлен сразу в виде некоторой суммы, не связанной с процентной ставкой, на все время сделки.

6.3. Дисконтирование по сложной процентной ставке

При финансовых вложениях в тот или иной вид бизнеса необходимо оценить их целесообразность, проанализировать будущие доходы при минимальном, базисном уровне доходности. Для этого используются методы, основанные на оценке будущих поступлений S_n (в виде прибыли, процентов, дивидендов и т. д.) с позиции текущего момента. В расчетах должны учитываться следующие условия:

– обесценение денег вследствие инфляции;

– различие темпов изменения цен на сырье, материалы, основные средства от темпа инфляции;

– периодические поступления дохода в размерах не ниже определенного минимума.

Дисконтирование в инвестиционном анализе заключается в приведении разновременных инвестиций и денежных поступлений по проекту к определенному моменту времени и определении показателя окупаемости капиталовложений – внутренней нормы доходности.

Оценка вложенного инвестором капитала с учетом прогнозируемой его рентабельности и ожидаемого через n лет наращенного капитала S производится по формуле

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot DM, \tag{76}$$

где P – текущая (приведенная) стоимость; S – денежная сумма, которую планируется получить через n лет; i – сложная процентная ставка, называемая ставкой дисконтирования; DM – дисконтный множитель, формула расчета которого

$$DM = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}. \tag{77}$$

Дисконтный множитель показывает «сегодняшнюю» цену одной денежной единицы будущего. Другими словами, величина DM показывает, чему с позиции текущего момента равна одна денежная единица, циркулирующая в сфере бизнеса, при заданной процентной ставке (ставке доходности) i.

Формула (76) отражает процесс дисконтирования, т. е. нахождение такой величины капитала P, которая через n лет при наращении по сложным процентам по ставке i будет равна S.

Экономический смысл такой оценки можно интерпретировать по другому: для инвестора сумма P в данный момент времени и сумма S через n лет одинаковы по своей ценности.

Дисконт определяется из разности:

$$D = S - P = S - \frac{S}{(1+i)^n} = S\left[1-(1+i)^{-n}\right] = S(1-DM).$$

Формула дисконтирования по сложным процентам (76), представленная в символической форме, имеет вид

$$PV = FV \cdot FM2,$$

где $FM2 = \dfrac{1}{(1+i_c)^n}$ – функция сложного процента, имеющая названия ***дисконтного множителя, дисконт-фактора, текущей стоимости единичного вложения.***

Формула расчета *PV* используется для оценки текущей стоимости ожидаемого или прогнозируемого капитала в будущем с учетом заданной нормы дисконта. Эта функция является обратной величиной функции «множитель наращения». Значения функционального множителя *FM2* приведены в прил. 2.

При *m*-разовом начислении процентов в год дисконтированная величина определяется по формуле

$$P = \frac{S}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}} = S \cdot DM(j,m), \qquad (78)$$

где *DM(j,m)* – дисконтный множитель при *m*-разовом начислении процентов по номинальной ставке *j*. Расчетная формула дисконтного множителя

$$DM(j,m) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}. \qquad (79)$$

Используя формулы (76) и (78), можно приводить в сопоставимый вид оценку доходов от инвестиций, ожидаемых к поступлению в течение ряда лет. В этом случае ставка дисконтирования (норма дисконта) в дисконтном множителе устанавливается инвестором и равна тому относительному размеру дохода, который инвестор хочет или может получить на инвестируемый им капитал. Таким образом, ставка дисконтирования отражает величину рентабельности долгосрочной инвестиции.

Определение ставки дисконтирования проводится различными методами. Одним из методов, широко применяемых на практике, является метод ***кумулятивного построения.*** Определяя ставку дисконтирования в дисконтном множителе, обычно исходят из так называемого базисного, или гарантированного, уровня доходности финансовых инвестиций, который обеспечивается Центральным банком по вкладам или при операциях с ценными бумагами. Кроме того, вводится надбавка за риск. Таким образом, процентная ставка i_c, используемая в дисконтном множителе, определяется суммой составляющих:

$$i_c = i_f + i_r,$$

где i_f – безрисковая ставка рентабельности (доходности); i_r – надбавка в уровне рентабельности в зависимости от степени риска конкретного варианта капиталовложений (премия за риск).

На практике существуют различные аналитические подходы к расчету проектной дисконтной ставки, с которыми можно ознакомиться в специальной литературе по инвестиционному анализу.

Рассмотрим пример, который наглядно показывает роль надбавки за риск в ставке дисконтирования при расчете текущей стоимости капитала.

П р и м е р

Сегодня вы имеете сумму 300 тыс. р. Вам предстоит выбрать два варианта вложения денег:

1) вложить в банк под 18 % годовых;

2) войти всем вашим капиталом в организацию венчурного (рискового) предприятия (экономические расчеты этого вложения денег показали, что через шесть лет вложенная сумма утроится).

Оценку можно провести с позиций настоящего и будущего.

1) Оценка с позиции будущего

Первый вариант вложения средств в банк с гарантированным доходом – расчет по формуле

$S_1 = P\,(1 + i_c)^n = 300\,(1 + 0{,}18)^6 = 300 \cdot 2{,}6996 = 809{,}866$ *тыс. р.*

Второй вариант предполагает, что через шесть лет вложенная сумма утроится, т. е. $S_2 = 300 \cdot 3 = 900$ *тыс. р.*

Приведенный расчет свидетельствует об экономической выгоде вложения средств в венчурное предприятия.

Однако при принятии окончательного решения ***необходимо учесть фактор риска.*** *Поэтому необходим анализ с учетом этого фактора с позиции настоящего.*

2) Оценка с позиции настоящего

Первый вариант предполагает наличие денежной суммы, вкладываемой на банковский депозит: 300 тыс. р.

По второму варианту необходимо обосновать ставку дисконтирования. Предположим, что финансовый консультант рекомендует оценить риск участия в венчурном предприятии путем введения премии в ставку дисконтирования в размере 5 %. Таким образом, в расчете текущей стоимости капитала нужно использовать норму дисконта, равную 23 %.

Расчет текущей (приведенной) стоимости капитала, величиной 900 тыс. р., ожидаемого к получению через 6 лет, при участии в венчурном предприятии дает величину

$$P = \frac{900}{(1 + 0{,}23)^6} = 259{,}903 \text{ тыс. р.}$$

Сравнивая текущие стоимости двух рассматриваемых вариантов вложения денежных средств, можно сделать вывод, что участие в венчурном предприятии невыгодно для инвестора.

Формулы (76) и (78) связывают между собой современное *P* и будущее S значения денег. Если не учитывать фактор риска, то эти суммы в определенном смысле эквивалентны: сумма P сегодня при фиксированной процентной ставке равноценна сумме S через n лет. Однако экономическая оценка без учета факторов риска и инфляции приводит к неправильным результатам.

Величина денежной суммы без указания даты ее получения несет неполную экономическую информацию. Например, что больше: 1 тыс. р. 01.01.1990 г. или 1 млн р. 01.01.1995 г.?

6.4. Сравнение разновременных денежных сумм

Для сравнения денежных сумм необходимо привести их сначала к одному моменту времени. Например, если через время n_1 и n_2 ожидаются выплаты S_1 и S_2, мы можем их оценить с позиции момента времени n. Если процентная ставка i_c постоянна, то в момент времени n суммы выплат S_1 и S_2 эквивалентны соответственно суммам:

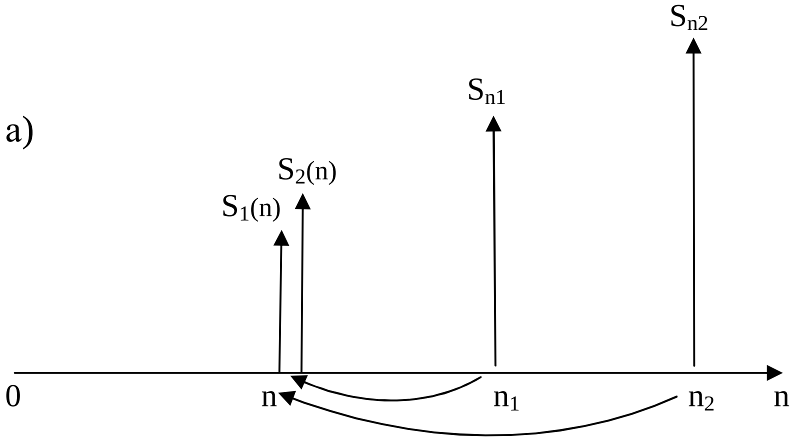
$$S_{1(n)} = S_{n_1}(1+i)^{n2-n} \quad \text{и} \quad S_{2(n)} = S_{n_2}(1+i)^{n2-n}.$$

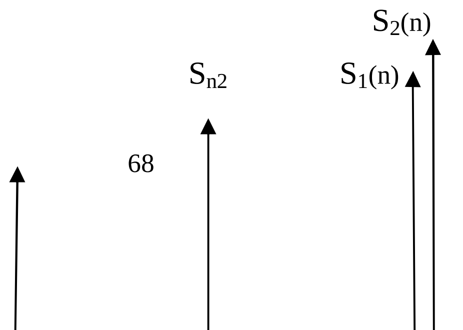
Так как суммы $S_1(n)$ и $S_2(n)$ относятся к одному моменту времени n, то их уже можно сравнивать между собой (рис. 12).

Очевидно, если $n < n_1$, то $S_{1(n)}$ является приведенной стоимостью суммы S_{n1}, а если $n > n_1$, то $S_{1(n)}$ является наращенной суммой. То же самое можно сказать и про сумму S_{n2}.

При проведении анализа нужно учитывать, что для инвестора сумма $S_{1(n)}$ в момент времени n и сумма S_{n1} в момент времени n_1 равнозначны по своей ценности. Аналогичное можно сказать и про суммы $S_{2(n)}$ и S_{n2}.

Можно доказать, что если процентная ставка постоянна и $S_{1(n)} > S_{2(n)}$ при некотором n, то это неравенство справедливо при любом n (докажите это самостоятельно).





S_{n1}

б)

0 n_1 n_2 n n

Рис. 12. Сравнение разновременных денежных сумм:
а) – дисконтирование; б) – наращение

П р и м е р

Что выгоднее: получить 160 тыс. р. через 3 года или 170 тыс. р. через 4 года, если можно поместить деньги на депозит под процентную ставку 10 % годовых?

Проведем оценку разновременных денежных сумм с позиций настоящего и будущего.

1) Оценка с позиции настоящего

Оценка проводится путем дисконтирования денежных сумм:

$$P_1 = \frac{160}{(1+0{,}1)^3} = 160 \cdot 0{,}7513 = 120{,}208 \ \text{тыс. р.}$$

$$P_2 = \frac{170}{(1+0{,}1)^4} = 170 \cdot 0{,}6830 = 116{,}110 \ \text{тыс. р.}$$

При экономической оценке полученных расчетных значений нужно учесть, что ***для инвестора сумма P в данный момент времени и сумма S через n лет одинаковы по своей ценности.*** *Сравнивая приведенные к одному моменту времени денежные суммы, можно сделать вывод, что выгоднее получить 160 тыс. р. через 3 года.*

2) Оценка с позиции будущего

Приведем денежную сумму 160 тыс. р. к четвертому году. При наращении этой суммы за один год получим

$$S_1 = 160\,(1 + 0{,}1) = 176 \ \text{тыс. р.}$$

Сравнивая ее с суммой 170 тыс. р. второго варианта, делаем аналогичный вывод.

Величины дисконтных множителей *DM* и *DM(j,m)*, значения которых определяются по формулам (76) и (76), зависят от следующих величин: от ставки дисконтирования, количества начислений процентов в году и срока финансовой операции.

Чем выше ставка процента, тем меньше дисконтный множитель, тем сильнее дисконтирование. Например, при сроке финансовой операции n = 5 лет увеличение сложной процентной ставки i = 10 % в два раза приводит к снижению дисконтного множителя с 0,620921 до 0,401878.

Значение дисконтного множителя снижается и с увеличением числа начислений процентов в году.

Влияние срока платежа также очевидно: с увеличением срока финансовой операции величина современной стоимости убывает. Отсюда следует, что при очень больших сроках она крайне незначительна. Например, если взять ставку i = 12 %, то для n = 10, 50 и 100 лет находим следующие значения дисконтных множителей: 0,32197; 0,003464; 0,000012.

При m-разовом начислении процентов в году дисконтированная величина определяется по формуле

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = S \cdot DM(j,m), \tag{80}$$

где $DM(j,m)$ – дисконтный множитель при m-разовом начислении процентов по номинальной ставке j. Расчетная формула дисконтного множителя:

$$DM(j,m) = \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}. \tag{81}$$

6.5. Банковский учет векселей

6.5.1. Основные понятия. Банковский учет, или банковское дисконтирование, применяется в вексельных операциях банком или другими финансовыми учреждениями.

Вексель – это письменное долговое обязательство установленной законом формы, выдаваемое заемщиком (векселедателем) кредитору (векселедержателю), предоставляющее последнему право требовать с заемщика уплаты к определенному сроку суммы денег, указанной в векселе.

Различают два вида векселей: простой и переводный. ***Простой вексель*** представляет собой ничем не обусловленное обязательство векселедателя уплатить по наступлении срока определенную сумму денег векселедержателю. ***Переводный вексель (тратта)*** – это письменный документ, содержащий письменный приказ векселедателя, адресованный плательщику, об уплате указанной в векселе суммы третьему лицу – держателю векселя. Переводный вексель обязательно должен быть акцептован плательщиком, и только после этого он приобретает силу исполнительного документа.

Акцепт является принятием плательщиком обязательства оплатить вексель при наступлении указанного в нем срока.

Специфика правовой основы векселя состоит в том, что он одновременно сочетает в себе свойства долгового обязательства, ценной бумаги и расчетного средства.

Векселедержатель (кредитор) или владелец иных договорных обязательств, в случае необходимости получения денег по векселю или другим договорным обязательствам ранее указанного в них срока, может продать его банку или другому субъекту по пониженной цене, т. е. по цене, ниже номинальной стоимости векселя, указанной в нем.

Сумма, полученная владельцем векселя в результате этой сделки, называется ***дисконтированной величиной.*** Она ниже номинальной стоимости векселя на величину дисконтного платежа.

Операция дисконтирования векселя иначе называется ***учетом векселя.*** Разность между номинальной стоимостью долгового обязательства и суммой, полученной векселедержателем в результате учета векселя, называется ***дисконтом.***

Дисконтирование может производиться по простой и сложной учетным ставкам.

6.5.2. Дисконтирование по простой учетной ставке. Логика простого учета векселя представлена на рис. 13.

Дисконт D представляет собой проценты, начисленные за время n от дня дисконтирования до дня погашения векселя на сумму S, подлежащую уплате в конце срока. Дисконт рассчитывается на основе объявленной банком учетной ставки d, величина которой зависит от срока, остающегося до оплаты обязательства, и существующих банковских процентных ставок.

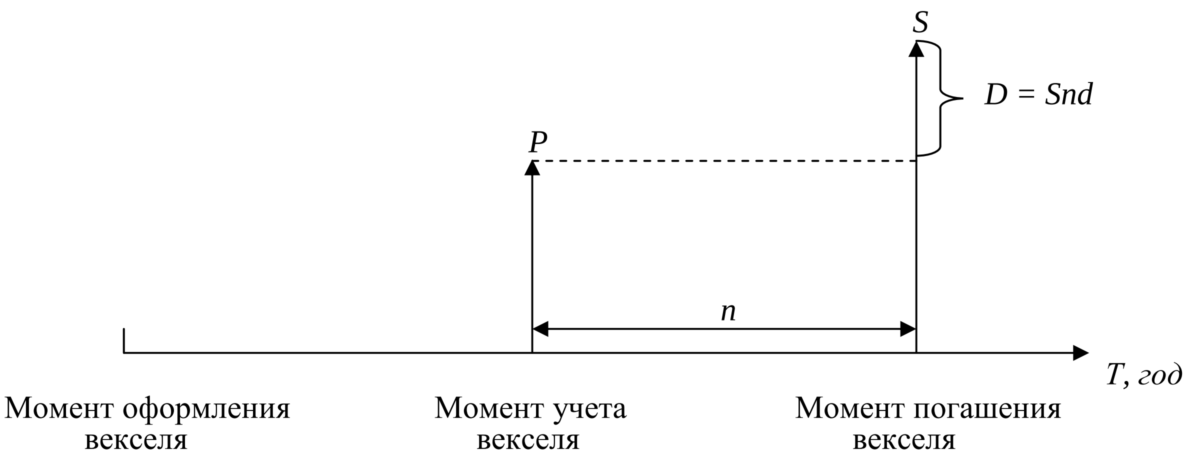


Рис. 13. Схема простого учета векселя

При учете векселя его владелец получает возможность получить деньги, хотя и не в полном объеме, однако, ранее указанного в векселе срока. Учет векселя является по существу формой кредитования векселедержателя путем досрочной выплаты ему обозначенной в векселе суммы за минусом определенных процентов. Банк же, получив при наступлении срока погашения векселя деньги, реализует процентный доход в виде дисконта. Дисконт представляет собой комиссионные, удерживаемые банком в свою пользу за предоставленную услугу.

Размер дисконта определяется по формуле

$$D = Snd, \tag{82}$$

где S – сумма к погашению, указанная в векселе; d – годовая учетная ставка, ***выраженная дробью***; n – срок от момента учета до даты погашения векселя (в годах).

Владелец векселя получит сумму, которая представляет дисконтированную величину векселя:

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \tag{83}$$

Множитель $DM = 1 - nd$ называется ***дисконтным множителем*** или ***коэффициентом дисконтирования.***

Учет векселей чаще осуществляется банковским способом: **АСТ/360** или **365/360.**

П р и м е р

Вексель номинальной стоимостью 500 тыс. р. был учтен в банке за 30 дней до срока погашения по учетной ставке 18 %. Определить дисконтированную величину векселя и дисконт банка.

Дисконтированная величина векселя определяется по формуле (83):

$$P = S(1 - nd) = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 500\left(1 - \frac{30}{360}0{,}18\right) = 492{,}5 \text{ \textit{тыс. р.}}$$

Величина дисконта D = S – P = 500 – 492,5 = 7,5 (тыс. р.)

На практике применяют более сложные вексельные операции, финансовые расчеты по которым должны учитывать их особенность.

Вексель является распространенным инструментом коммерческого кредита, выражающим финансовые обязательства заемщика по отношению к кредитору.

Коммерческий кредит – это кредит, предоставляемый продавцом покупателю в товарной форме при продаже и поставке товара с отсрочкой его оплаты. Продавец взамен товара получает вексель покупателя с обязательством произвести платеж в оговоренный срок. Процент за кредит может включаться в цену товара или в сумму векселя. Стороны по договоренности заключают сделку с оформлением векселя.

Стоимости векселя к погашению и в момент оформления будут различаться на величину процентов, которая зависит от ставки процента, предоставленной за кредит, и срока векселя.

При учете векселя доход банка будет складываться из двух частей:

– процентов по векселю, причитающихся за время, оставшееся до момента погашения векселя;

– комиссионных за предоставленную услугу.

Теоретическая дисконтная ставка обычно меньше процентной. Однако на практике, устанавливая дисконтную ставку, банк, как правило, повышает ее в зависимости от условий, на которых выдан вексель; риска, связанного с его погашением; комиссионных, которые банк считает целесообразным получить за оказанную услугу, и т. п.

Поскольку величина процентов по векселю за период от момента учета до момента погашения предопределена, банк может варьировать лишь размер комиссионных путем изменения учетной ставки.

Введем следующие обозначения:

P – стоимость векселя в момент оформления;

P_1 – теоретическая стоимость векселя в момент учета;

P_2 – предлагаемая банком сумма в обмен на вексель;

S – стоимость векселя к погашению;

Δ_0 – общий доход банка от операции.

Рассмотрим логику операции учета векселя на рис. 14

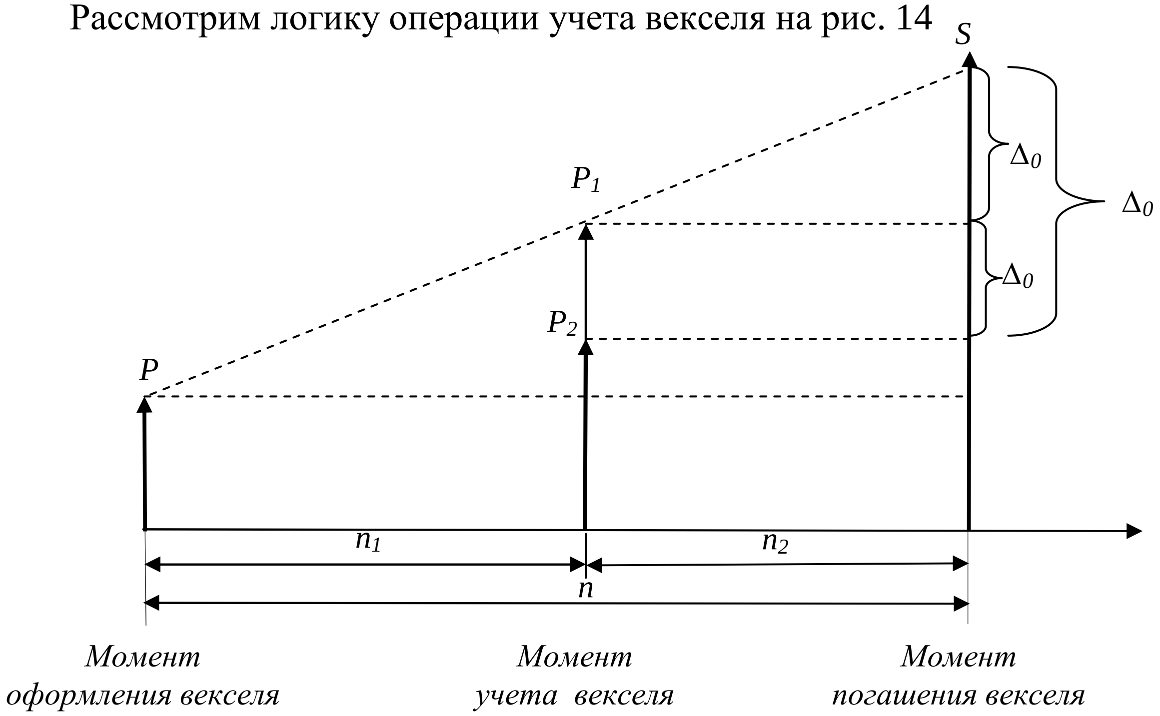


Рис. 14. Факторное разложение дохода банка при учете векселя

Величина P_2 представляет собой дисконтированную величину векселя и рассчитывается из суммы погашения векселя S и предлагаемой банком учетной ставки d:

$$P_2 = S(1 - n_2 d_2).$$

Разность $\Delta_c = P_1 - P_2$ – это сумма комиссионных, получаемых банком за услугу, оказываемую векселедержателю: плата за возможность быстрого получения наличных денег. Таким образом, общий доход банка от операции составляет

$$\Delta_0 = \Delta_p + \Delta_c.$$

Реальные потери векселедержателя:

$$\Delta_c = P_1 - P_2.$$

Расчет потерь векселедержателя, исходя из разности суммы погашения векселя и суммы, полученной на руки $(S - P_2)$, будет ошибочным, т. к. с момента учета векселя его владельцем становится банк и ему передаются права на получение процентов за оставшийся период.

6.5.3. Дисконтирование по сложной учетной ставке. В практике учетных операций используется сложная учетная ставка. При этом процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Очевидно, что формула расчета дисконтированной величины по сложной учетной ставке

$$P = S(1 - d)^n. \qquad (84)$$

Дисконтированный множитель: $DM = (1 - d)^n$.

Величина P представляет собой текущую (современную) стоимость будущего капитала S.

Дисконт рассчитывается как разность:

$$D = S - P = S - S(1 - d)^n = S\left[1 - (1 - d)^n\right] = S(1 - DM). \qquad (85)$$

Пример

Долговое обязательство на сумму 200 тыс. р., срок оплаты которого наступает через 4 года, учтено за 2 года до срока с дисконтом по сложной учетной ставке 10 % годовых. Определить дисконтированную величину.

Используя формулу (84), получаем

$$P = 200\,(1 - 0{,}1)^2 = 162 \text{ тыс. р.}$$

Дисконт

$$D = S - P = 200 - 162 = 38 \text{ тыс. р.}$$

Если применить простую учетную ставку такого же размера, то

$$P = 200\,(1 - 2 \cdot 0{,}1) = 160 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, дисконтирование по простой учетной ставке дает меньшее значение текущей стоимости, а следовательно, большее значение дисконта.

Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году. При этом в расчетной формуле используется номинальная годовая учетная ставка f и учитывается, что дисконтирование осуществляется в начале каждого периода, длительностью $1/m$, по ставке f/m:

$$P = S(1 - f/m)^{mn}. \tag{86}$$

Как и в случае процентной ставки, можно определить эффективную годовую учетную ставку d_{ef}, характеризующую степень дисконтирования за год, используя равенство дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n = (1 - f/m)^{mn},$$

откуда

$$d_{ef} = 1 - (1 - f/m)^m. \tag{87}$$

Из формулы (87) следует, что d_{ef} уменьшается с ростом m (т. к. второе слагаемое в правой части равенства увеличивается). Очевидно, что при $m>1$ справедливо неравенство $d_{ef} < f$, которое, естественно, объяснимо и из финансовых соображений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Что понимают под математическим дисконтированным и банковским учетом?*
2. *Как называют величину, найденную с помощью дисконтирования?*
3. *Как определяют дисконт?*
4. *Сформулируте прямые и обратные задачи при начислении процентов и дисконтировании.*
5. *Какие зависимости от времени представляют дисконтные множители?*
6. *В чем сущность банковского учета векселя?*
7. *Как определить срок операции дисконтирования, какие параметры для этого должны быть известны?*
8. *Очевидно, что чем больше рассматриваемый интервал времени, тем более грубой является модель приведения разновременных денежных сумм к одному моменту времени. Перечислите факторы, которые в ней не учтены.*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (75)–(87), решите следующие задачи с обязательным объяснением полученных результатов.

6.1. Долговое обязательство в сумме *P* должно быть погашено через *t* дней с процентами, начисленными по процентной ставке *i* % годовых. Владелец обязательства учел его в банке за t_1 дней до наступления срока погашения по учетной ставке *d*. Определить дисконтированную сумму и дисконт, полученный банком. Исходные данные представлены в табл. 29.

Таблица 29

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*t, дн.*	*i, %*	*t_1, дн.*	*d, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*t, дн.*	*i, %*	*t_1, дн.*	*d, %*
1	200	80	10	15	12	***16***	400	120	15	30	18
2	300	60	12	10	15	***17***	220	90	12	25	14
3	250	45	15	20	18	***18***	380	150	13	30	15
4	400	120	14	30	16	***19***	180	45	10	15	13
5	180	60	12	10	15	***20***	540	135	16	45	19
6	500	100	8	40	12	***21***	240	80	11	20	14
7	360	90	10	30	14	***22***	350	110	14	30	16
8	400	120	12	50	16	***23***	140	50	10	10	12
9	120	60	16	20	18	***24***	420	105	8	25	13
10	280	80	14	30	16	***25***	250	70	13	20	16
11	320	75	15	25	18	***26***	300	140	15	50	18
12	500	150	9	60	13	***27***	150	75	12	25	14
13	450	140	10	50	14	***28***	480	150	9	30	12
14	240	45	12	15	15	***29***	200	60	11	15	15
15	300	105	14	35	16	***30***	260	90	14	25	16

6.2. Из какого капитала можно получить *P* тыс. р. через *n* лет нарашением сложными процентами по ставке *i* % годовых, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) ежеквартально? Исходные данные представлены в табл. 30.

Таблица 30

Номер варианта	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*P, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	300	4	10	***16***	500	4	12
2	400	5	12	***17***	720	3	15
3	560	3	14	***18***	850	6	18
4	650	6	16	***19***	950	4	16
5	700	4	18	***20***	820	5	15
6	360	3	12	***21***	760	3	18
7	580	6	14	***22***	650	6	14
8	760	4	16	***23***	580	4	12
9	800	5	18	***24***	460	5	10
10	900	4	16	***25***	880	3	18
11	680	6	15	***26***	700	4	14
12	700	3	18	***27***	660	6	12
13	650	5	12	***28***	700	4	15

14	860	4	16	***29***	950	5	14
15	580	6	14	***30***	800	3	18

6.3. Долговое обязательство на выплату *S* тыс. р. со сроком погашения через n лет учтено за n_1 лет до срока. Определите полученную сумму, если производилось дисконтирование по номинальной сложной учетной ставке d_c % годовых: а) полугодовое; б) поквартальное.

Исходные данные представлены в табл. 31.

Таблица 31

Номер варианта	*S, тыс. р.*	*n, год*	*n₁, год*	*d_c, %*	*Номер варианта*	*S, тыс. р.*	*n, год*	*n_1, год*	*d_c, %*
1	500	4	2	12	***16***	800	4	2	18
2	660	6	3	14	***17***	450	3	2	16
3	700	5	3	18	***18***	380	4	3	14
4	400	7	4	12	***19***	400	6	4	12
5	780	3	2	15	***20***	680	7	5	15
6	900	5	3	18	***21***	720	6	4	14
7	600	4	3	16	***22***	950	8	5	16
8	480	6	4	14	***23***	860	6	3	15
9	360	3	2	12	***24***	500	4	2	12
10	720	5	3	16	***25***	860	5	3	16
11	650	6	4	14	***26***	380	3	2	10
12	460	4	2	15	***27***	400	4	2	12
13	780	5	3	16	***28***	640	5	3	14
14	600	7	4	18	***29***	720	6	4	16
15	450	4	3	14	***30***	800	7	5	14

6.4. Какая сумма предпочтительнее при ставке i_c % годовых: *P* тыс. р. сегодня или *S* тыс. р. через *n* лет? Исходные данные представлены в табл. 32.

Таблица 32

Номер вари-анта	*P, тыс. р.*	*S, тыс. р.*	*n, год*	*i_c, %*	*Номер вари-анта*	*P, тыс. р.*	*S, тыс. р.*	*n, год*	*i_c, %*
1	200	360	3	10	***16***	300	560	4	10
2	400	580	2	12	***17***	680	950	3	12
3	360	500	3	14	***18***	500	750	3	14
4	540	700	4	10	***19***	450	620	4	12
5	300	580	5	8	***20***	350	480	5	15
6	480	600	4	12	***21***	620	840	4	12
7	260	400	3	14	***22***	800	1000	2	10
8	500	760	4	12	***23***	750	980	3	8
9	240	320	2	16	***24***	900	1200	2	12
10	460	600	3	15	***25***	400	650	4	10
11	600	820	4	14	***26***	520	760	5	8
12	580	640	3	12	***27***	480	720	4	12
13	740	900	2	10	***28***	560	800	3	14

14	360	500	4	8	***29***	780	950	2	10
15	450	680	3	12	**30**	840	1100	3	8

6.5. Долг в размере *S* тыс. р. должен быть выплачен через *n* лет. Требуется найти эквивалентные по ставке i % годовых значения долга: а) через n_1 лет; б) через n_2 лет. Исходные данные представлены в табл. 33.

Таблица 33

Номер вари-анта	*S, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*n_1, год*	*n_2, год*	*Номер вари-анта*	*S, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*n_1, год*	*n_2, год*
1	600	3	24	2	5	***16***	700	3	26	2	6
2	480	4	22	2	6	***17***	450	4	24	2	7
3	500	5	18	3	7	***18***	900	2	28	1	5
4	360	4	20	2	6	***19***	720	3	20	2	6
5	700	3	28	1	5	***20***	650	4	18	2	8
6	840	2	32	1	4	***21***	940	2	32	1	5
7	480	4	28	2	6	***22***	660	3	25	2	6
8	560	3	30	2	5	***23***	440	4	24	1	8
9	380	5	26	3	7	***24***	580	3	22	2	6
10	400	4	24	2	6	***25***	620	3	26	2	7
11	760	3	20	2	5	***26***	840	2	28	1	5
12	840	2	28	1	4	***27***	960	3	25	2	6
13	900	3	25	2	5	***28***	350	5	18	3	8
14	540	4	22	2	6	***29***	400	4	20	2	9
15	680	3	24	1	55	***30***	700	3	24	1	6

6.6. Кредитное обязательство, равное *S* тыс. р., со сроком погашения через *n* лет, было учтено в день его оформления в банке по учетной ставке *d %* годовых, начисление дисконта – по полугодиям. На основе исходных данных табл. 34 определите современную стоимость обязательства и эффективную учетную ставку.

Таблица 34

Номер варианта	*S, тыс. р.*	*n, год*	*d, %*	*Номер варианта*	*S, тыс. р.*	*n, год*	*d, %*
1	800	3	8	***16***	460	5	12
2	560	4	10	***17***	900	4	10
3	640	2	14	***18***	860	3	14
4	400	3	15	***19***	460	5	12
5	550	2	18	***20***	360	6	8
6	680	3	12	***21***	500	4	16
7	360	4	15	***22***	620	3	12
8	600	5	10	***23***	880	4	15
9	780	4	8	***24***	900	3	16
10	900	3	14	***25***	450	5	10

11	840	4	12	***26***	520	4	12
12	500	5	16	***27***	660	3	8
13	380	6	12	***28***	700	2	16
14	520	5	15	***29***	820	3	12
15	620	4	14	***30***	950	2	15

6.7. За долговое обязательство в S тыс. р. банком было выплачено P тыс. р. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка d % . Исходные данные представлены в табл. 35.

Таблица 35

Номер варианта	*S, тыс. р.*	*P, тыс. р.*	d_c, *%*	*Номер варианта*	*S, тыс. р.*	*P, тыс. р.*	d_c, *%*
1	450	380	8	***16***	900	750	14
2	300	240	10	***17***	540	480	8
3	650	580	12	***18***	360	320	10
4	480	420	10	***19***	400	340	12
5	800	640	14	***20***	660	560	10
6	580	460	16	***21***	840	750	8
7	400	320	12	***22***	920	800	12
8	540	480	10	***23***	520	400	14
9	460	400	8	***24***	460	380	16
10	380	320	12	***25***	550	450	10
11	500	440	10	***26***	440	360	12
12	650	550	12	***27***	650	550	14
13	800	650	16	***28***	420	380	16
14	920	840	18	***29***	740	650	8
15	750	680	14	***30***	850	720	12

6.8. Вексель был учтен за t дней до срока, при этом владелец векселя получил k % от номинальной суммы векселя. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен вексель? Исходные данные представлены в табл. 36.

Таблица 36

Номер варианта	*t, дн.*	*k, %*	*Номер варианта*	*t, дн.*	*k, %*
1	90	80	***16***	120	50
2	120	75	***17***	60	80
3	60	90	***18***	210	40
4	150	70	***19***	90	70
5	90	80	***20***	150	65
6	60	90	***21***	75	80
7	120	75	***22***	240	60
8	180	60	***23***	180	75
9	45	80	***24***	60	90
10	90	70	***25***	120	60
11	120	65	***26***	90	75
12	60	85	***27***	75	95

13	150	70	***28***	150	65
14	90	85	***29***	210	60
15	180	65	***30***	60	90

6.9. Владелец векселя номинальной стоимостью 5 млн р. Учел его в банке за 2 месяца до срока погашения по простой учетной ставке 36 % годовых. Банк удерживает комиссионные в размере 2 % от номинальной стоимости векселя. Какую сумму получил владелец векселя и чему равна доходность этой сделки по эффективной ставке простых процентов?

6.10. Владелец веселя учел его в банке за 2 месяца до срока погашения по простой учетной ставке 36 % годовых и получил 2 млн р. Годовой уровень инфляции – 18 %. Определите номинальную стоимость векселя и реальную учетную ставку банка.

6.11. Номинальная учетная ставка банка – 48 % годовых. Дисконтирование ежемесячное. Эффективная ставка по вексельным операциям – 16 %. Определите ожидаемый годовой уровень инфляции.

6.12. Четыре векселя номинальной стоимостью 2, 6, 8 и 10 млн р. со сроками погашения 120, 80, 90 и 130 дней объединяются в один вексель со сроком погашения 150 дней. Консолидация происходит по простой процентной ставке 12 % годовых. Определите стоимость объединенного векселя.

7. ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ

7.1. Потоки платежей

В финансовых операциях оплата по заключенным сделкам может предусматривать как разовый платеж, так и ряд выплат, распределенных во времени. Это погашение среднесрочного и долгосрочного банковского и коммерческого кредитов, денежный поток в инвестиционных проектах, создание денежных фондов целевого назначения и т. п. Такие финансовые операции в большинстве случаев предусматривают выплаты, производимые через определенные промежутки времени. При этом возникает ряд последовательных платежей, которые обычно именуют ***потоком платежей***.

В западной финансовой литературе применяется термин ***«cash flows»***, что в переводе означает «потоки наличности».

Элементами потока платежей могут быть как положительные величины (притоки, поступления денег), так и отрицательные величины (оттоки, денежные выплаты).

Разработка любого инвестиционного проекта предполагает формирование потока платежей и последующую оценку эффективности рассматриваемого проекта. Для этого необходимо иметь знания математических методов по вычислению отдельных показателей различных потоков платежей.

В финансово-экономических расчетах и анализе проводится оценка денежного потока, выполняемая в рамках решения двух задач:

– прямой, т. е. проводится оценка с позиции будущего (реализуется схема наращения);

– обратной, т. е. проводится оценка с позиции настоящего (реализуется схема дисконтирования).

Прямая задача предполагает суммарную оценку наращенного денежного потока (*amount of cash flow*), т. е. в ее основе лежит будущая стоимость (*future value*).

Обратная задача предполагает суммарную оценку дисконтированного (приведенного) денежного потока (*present value of cash flow*). Поскольку отдельные элементы денежного потока генерируются в различные временные интервалы, а деньги имеют разную ценность во времени, непосредственное их суммирование невозможно.

Приведение денежного потока к одному моменту времени (чаще на текущий момент) осуществляют путем дисконтирования.

7.2. Аннуитет (финансовая рента): основные понятия

Одним из ключевых понятий в финансовых и коммерческих расчетах является понятие аннуитета. Логика, заложенная в схему аннуитетных платежей, широко используется при оценке долговых и долевых ценных бумаг, в анализе инвестиционных проектов и арендных платежей.

Аннуитет (*annuity*), или ***финансовая рента*** (*rent*), – это ряд последовательных фиксированных платежей (денежных поступлений), производимых через равные промежутки времени. Поток платежей аннуитета представляет собой последовательность положительных величин, распределенных во времени через равные интервалы.

Поток платежей в виде аннуитета (финансовой ренты) нередко встречается на практике. Количественный анализ таких потоков не сложен. Он позволяет применять стандартные формулы расчета показателей, характеризующих ренту.

Аннуитет, или ренту, характеризуют следующие параметры:

– ***элемент аннуитета*** – величина каждого отдельного платежа;

– ***период аннуитета*** *(annuity period, rent period, payment period)* – временной интервал между двумя последовательными платежами;

– ***срок аннуитета*** *(term)* – время от начала реализации аннуитета до момента начисления последнего платежа;

– ***процентная ставка*** *(interest rate)* – ставка, используемая для расчета наращения или дисконтирования платежей, составляющих аннуитет (ренту).

Аннуитеты (финансовые ренты) классифицируются по следующим признакам:

1) по количеству платежей в году:

   а) *дискретные:*

   – *годовые* – платежи по которым производятся 1 раз в год;
   – *р-срочные* – при производстве платежей несколько раз в году (p – количество платежей (поступлений) в году);
   – с периодом между платежами, превышающим 1 год;

   б) непрерывные – аннуитеты, в которых платежи производятся настолько часто, что их можно рассматривать как непрерывный поток (непрерывная рента);

2) в зависимости от частоты начисления процентов:

   – с начислением процентов один раз в год;
   – с начислением процентов несколько раз в году *(m* раз);
   – с непрерывным начислением процентов;

3) по моменту выплат:

– *постнумерандо* (обычный аннуитет) (*ordinary annuity*) – аннуитеты, в которых платежи производятся в конце соответствующих временных периодов (года, полугодия и т. д.);
– *пренумерандо* (*annuity due*) – аннуитеты, в которых платежи осуществляются в начале временных периодов;
– аннуитеты, в которых поступление платежей производится в середине временного периода.

Графическое представление аннуитетов постнумерандо и пренумерандо приведено на рис. 15.

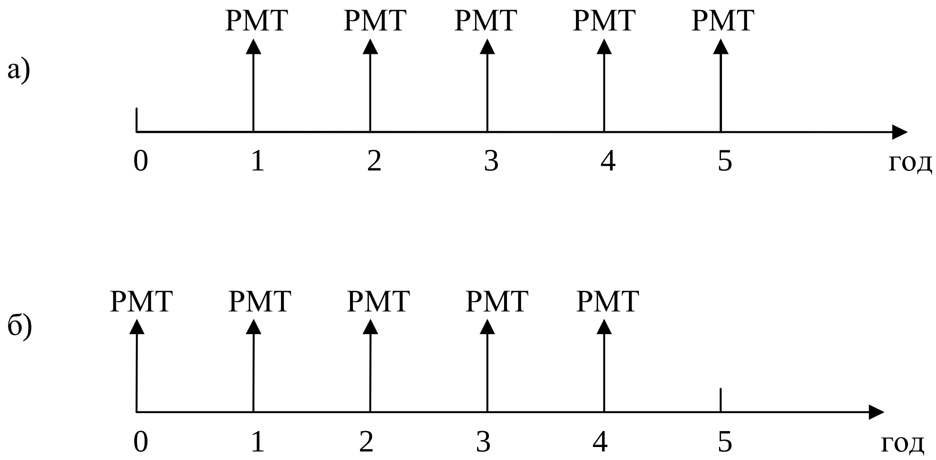


Рис. 15. Аннуитеты: а) – постнумерандо; б) – пренумерандо

4) по стабильности размера платежей:
– постоянные (с одинаковыми платежами);
– переменные;

5) по наличию условий:
– верные – выплаты по которым подлежат безусловной уплате;
– условные – выплата по которым обусловлена наступлением какого-либо события.

Примером условного аннуитета могут служить страховые взносы, вносимые до наступления страхового случая;

6) по количеству элементов:
– ограниченные – с конечным числом элементов;
– вечные аннуитеты – с бесконечным числом элементов.

Ренты с конечным числом элементов ограничены по срокам. Вечные ренты не имеют ограничения по срокам. Примером вечной ренты могут служить периодические выплаты доходов по государственным бессрочным облигациям, выплачиваемые через определенные промежутки времени;

7) по моменту реализации платежей:

– немедленные, в которых платежи производятся сразу же после заключения контракта;
– отложенные (отсроченный) – срок реализации платежей в которых откладывается на указанное в контракте время.

Обобщающими показателями любого потока платежей являются: ***наращенная сумма*** (*amount of cash flows*) и ***текущая (****приведенная, современная****) стоимость*** *(present value of cash flows).*

Обобщающие характеристики аннуитета (финансовой ренты) используются в финансовом анализе при заключении различных коммерческих сделок; для планирования погашения задолженности; сравнения эффективности инвестиционных проектов, имеющих различные условия их реализации.

7.3. Наращенная сумма обычного аннуитета (постнумерандо)

Наращенная сумма аннуитета (потока платежей) – это сумма всех элементов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока, т. е. на дату последней выплаты.

Наращенная сумма показывает, какую величину будет представлять капитал, вносимый через равные промежутки времени в течение всего срока аннуитета, вместе с начисленными процентами.

Наращенная сумма аннуитета может представлять собой общую сумму накопленной задолженности с учетом начисленных процентов на конец срока погашения, итоговый объем инвестиций, величину фонда накопления за определенный срок и т. д.

Для вывода формулы наращенной суммы аннуитета постнумерандо примем обозначения:

PMT – величина ежегодного платежа (денежной выплаты); условное обозначение исходит от английского слова *«payment»*, что дословно означает «платеж»;

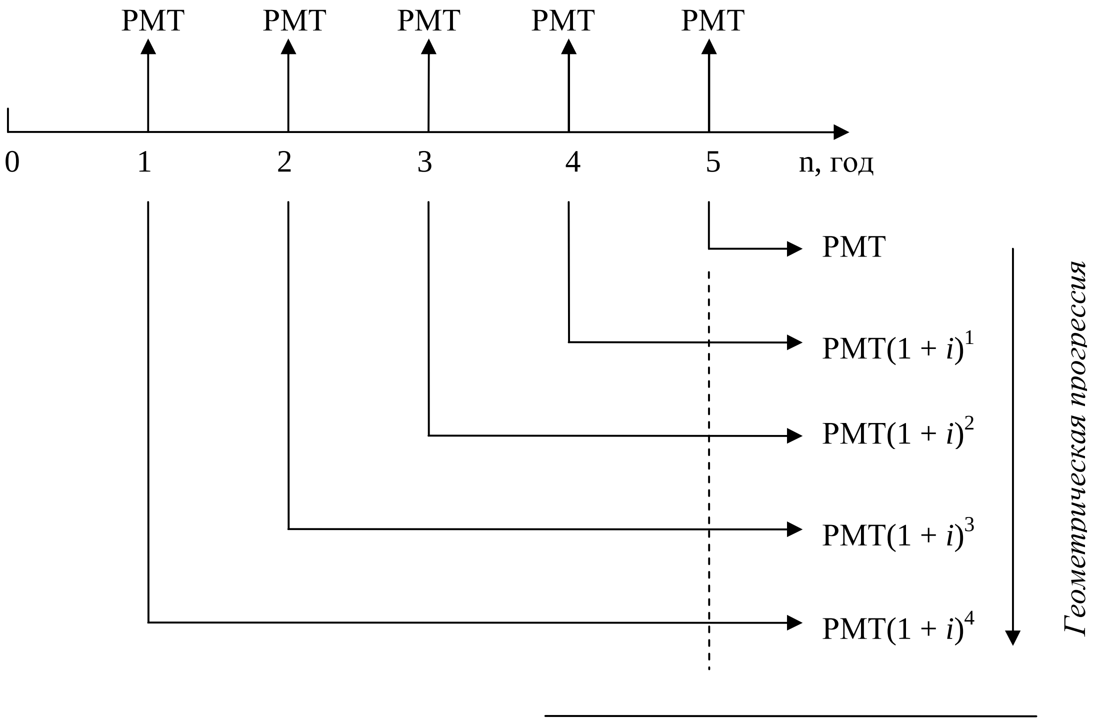
i – процентная ставка;

n – срок аннуитета;

T – период аннуитета (временной интервал между двумя платежами).

FVA – наращенная сумма аннуитета (финансовой ренты) постнумерандо (*future value of annuity)*

Предположим, что обычный аннуитет сроком 5 лет характеризуется величиной ежегодного платежа *PMT*. Для нахождения наращенной суммы ренты необходимо привести отдельные ее элементы на конец срока путем их наращения с учетом начисленных процентов, а затем найти сумму всех значений приведенных элементов аннуитета (рис. 16).



$$FVA = \sum_{j=0}^{n-1} PMT(1+i)^{j}$$

Рис. 16. Формирование наращенной суммы обычного аннуитета

Последовательность элементов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока аннуитета представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 + i$. Наращенная сумма обычного аннуитета тогда будет представлять собой сумму членов геометрической прогрессии, формула которой известна из курса элементарной математики (21):

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где a_1 – первый член геометрической прогрессии; q – знаменатель геометрической прогрессии; n – количество членов геометрической прогрессии (равно числу лет срока ренты).

Подставляя в формулу (21) значения последовательности приведенных элементов аннуитета на конец срока, получим

$$FVA = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}.$$

После упрощения окончательно получим формулу расчета наращенной суммы обычного аннуитета:

$$FVA = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i} = PMT \cdot FM3, \quad (88)$$

где *FM3* – функция сложных процентов:

$$FM3 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (89)$$

Функция имеет следующие названия, встречающиеся в финансовой литературе: ***коэффициент наращения аннуитета, будущая стоимость единичного вложения за период, коэффициент аккумуляции вкладов.***

Полученная функция представляет собой будущую стоимость равных единичных платежей в течение *n* периодов при ставке сложного процента *i*.

Количественные значения функции приведены в финансовых таблицах в прил. 2.

П р и м е р

Предприятие планирует создать фонд накопления. С этой целью в конце года отчисляется в банк 10 млн р. под 12 % годовых с последующей их капитализацией. Определить величину фонда накопления через 5 лет.

Величина фонда накопления представляет собой наращенную сумму аннуитета:

$$FVA = 10\frac{(1+0{,}12)^5}{0{,}12} = 10 \cdot 6{,}3528 = 63{,}528 \ \text{млн р.}$$

Таким образом, размер фонда накопления в конце пятого года составит 63,528 млн р.

Если платежи поступают *p* раз в году, а проценты начисляются *m* раз в году, то общая формула расчета при таких условиях

$$FVA = PMT\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}, \quad (90)$$

где PMT – общая сумма рентных платежей за год; j – годовая номинальная процентная ставка.

Ниже в табл. 37 представлены формулы расчета наращенной суммы аннуитетных платежей при различных условиях контрактов.

Таблица 37

Формулы расчета наращенной суммы аннуитета (финансовой ренты) при различных поступлениях платежей и начислений процентов в году

Количество поступлений платежей в году	Количество начислений процентов в году	Формула расчета наращенной суммы финансовой ренты
$p = 1$	$m = 1$	$FVA = PMT\,\frac{(1+i)^n}{i}$
$p = 1$	$m > 1$	$FVA = PMT\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$
$p > 1$	$m = 1$	$FVA = PMT\,\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$
$p > 1$	$m = p$	$FVA = PMT\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$
$p > 1$	$m \neq p$	$FVA = PMT\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$

П р и м е р

По условиям договора о страховании платежи должны поступать в страховую фирму ежеквартально в размере 10 тыс. р. в течение 3 лет.

Банк, обслуживающий страховую компанию, начисляет проценты ежемесячно по ставке 8 % годовых. Определить сумму накоплений по этому контракту.

Используя формулу (90), получим искомую сумму накоплений:

$$FVA = 10 \cdot 4 \frac{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12\cdot 3} - 1}{4\left[\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right]} = 134{,}422 \ \textit{тыс.р.}$$

7.4. Определение годового платежа по наращенной сумме обычного аннуитета

Если необходимо решить задачу определения годового платежа для создания планируемого фонда накопления за *n* лет, то можно воспользоваться формулой (88):

$$PMT = FVA \frac{i}{(1+i)^n - 1} \tag{91}$$

В символической форме это соотношение имеет вид:

$$PMT = FVA \cdot FM4,$$

где $$FM4 = \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{92}$$

FM4 – функция сложных процентов, имеющая название: ***фактор фонда возмещения.***

Фактор фонда возмещения характеризует величины равновеликих платежей, аккумулирующих на счету к концу срока аннуитета 1 денежную единицу.

Значения функции *FM4* приведены в прил. 2.

П р и м е р

Определить размер платежей, которые необходимо вносить в конце года в течение 5 лет в банк под 12 % годовых для накопления суммы в размере 1,5 млн р. для покупки квартиры.

Для расчета размера годового платежа используем формулу (91):

$$PMT = 1\ 500\ 000 \frac{0{,}12}{(1+0{,}12)^5 - 1} = 236\ 115 \ \ р.$$

Используя формулы, представленные в табл. 37, можно определить величины платежей по наращенной величине обычного аннуитета с учетом различного количества поступлений платежей и начислений процентов в году.

Общая формула расчета с учетом различного количества поступлений платежей и начислений процентов в году:

$$PMT = FVA\frac{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}. \qquad (93)$$

П р и м е р

Определить величину ежемесячных поступлений на депозит для накопления денежной суммы 500 тыс. р. за 3 года. Проценты начисляются ежемесячно по ставке 12 % годовых.

По условию m = p = 12, p>1. Формула для этого случая имеет вид (см. табл. 37)

$$PMT = FVA\frac{j}{\left(1+\frac{j}{m}\right)-1}.$$

Расчет ежегодной суммы выплат:

$$PMT = 500\frac{0{,}12}{\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 3}-1} = 139{,}285 \ \textit{тыс. р.}$$

Ежемесячный платеж составит

$$PMT = \frac{139{,}285}{12} = 11{,}607 \ \textit{тыс. р.}$$

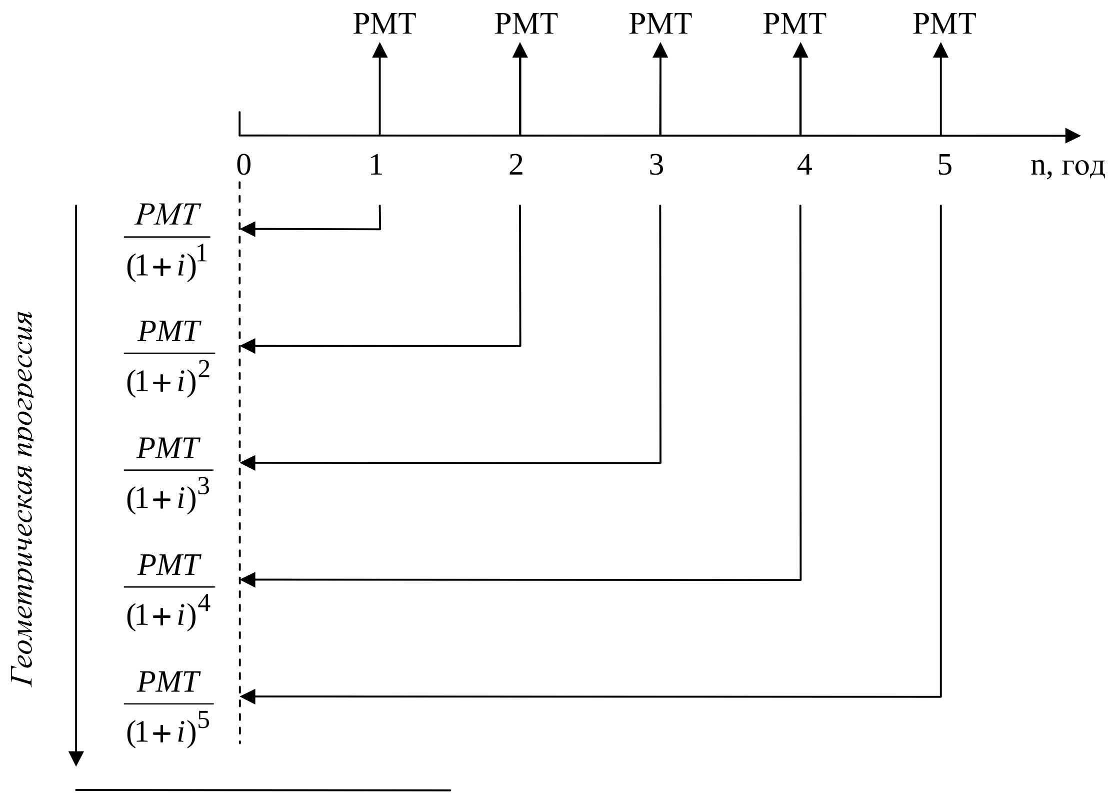
7.5. Современная стоимость обычного аннуитета (постнумерандо)

Современная (приведенная, текущая) стоимость аннуитета (потока платежей) – это сумма всех его элементов, дисконтированных на начало потока платежей.

Современная стоимость может характеризовать приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта. В кредитных операциях текущая стоимость потока платежей – это величина выдаваемого кредита сегодня, исходя из значений периодических выплат по погашению долга.

Современная стоимость показывает, какую сумму следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые бы начислялись установленные проценты в течение срока аннуитета, можно было обеспечить получение наращенной суммы.

Пусть аннуитет постнумерандо сроком 5 лет характеризуется величиной ежегодного платежа *PMT*. Для нахождения современной стоимости аннуитета необходимо привести отдельные его элементы на начальный момент времени путем дисконтирования, а затем найти сумму всех значений приведенных элементов аннуитета (рис. 17).



$$PVA = \sum_{j=1}^{n} \frac{PMT}{(1+i)^j}$$

Рис.17. Формирование современной стоимости аннуитета постнумерандо

Последовательность дисконтированных элементов потока на начало реализации аннуитета представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{(1+i)}$.

Современная стоимость аннуитета (финансовой ренты) будет представлять собой сумму членов полученной геометрической прогрессии.

Используя формулу (21), можно получить выражение для определения современной величины обычной ренты *PVA* (*present value of annuity):*

$$PVA = \frac{PMT}{(1+i)} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{PMT}{(1+i)} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{1-1-i}{(1+i)}}.$$

После сокращения получим

$$PVA = PMT \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{94}$$

В символической форме это соотношение имеет вид

$$PVA = FVA \cdot FM5.$$

В представленном выражении функция сложных процентов

$$FM5 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{95}$$

имеет названия ***коэффициента дисконтирования аннуитета, коэффициента приведения годового аннуитета, текущей стоимости единичного вложения за период.***

Значения функции *FM5* приведены в прил. 2.

Пример

Какую сумму необходимо сегодня положить на депозит под 20 % годовых, чтобы в течение 5 лет в конце каждого года снимать со счета 50 тыс. р. для оплаты обучения в университете.

Вложенная сумма на депозит представляет собой текущую стоимость аннуитета при ежегодных банковских выплатах в размере 50 тыс. р. вкладчику:

$$PVA = 50 \cdot \frac{1-(1+0{,}2)^{-5}}{0{,}2} = 50 \cdot 2{,}9906 = 149{,}53 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, достаточно сегодня положить на депозитный счет 149,53 тыс. р. под 20 % годовых, чтобы иметь возможность ежегодно снимать по 50 тыс. р. в течение 5 лет.

Расчетные формулы для определения современной стоимости обычного аннуитета при различном количестве платежей и начислений процентов в году приведены в табл. 38.

Таблица 38

Формулы расчета современной стоимости обычного аннуитета при различных поступлениях платежей и начислений процентов в году

Количество поступлений платежей в году	Количество начислений процентов в году	Формула расчета современной стоимости финансовой ренты
$p = 1$	$m = 1$	$PVA = PMT\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
$p = 1$	$m > 1$	$PVA = PMT\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}$
$p > 1$	$m = 1$	$PVA = PMT\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$
$p > 1$	$m = p$	$PVA = PMT\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$
$p > 1$	$m \neq p$	$PVA = PMT\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$

П р и м е р

Заемщик, имеющий месячный доход 20 тыс. р., желает взять в коммерческом банке автокредит под 18 % годовых. Рассчитайте возможный размер кредита сроком на 3 года, погашаемого ежемесячными аннуитетными платежами при ежемесячном начислении процентов. Размер ежемесячных платежей не должен превышать 50 % дохода заемщика.

По условию задачи количество платежей в году и начислений процентов m = p = 12 (p > 1). Для вычисления возможного размера кредита применяем формулу из табл. 38 для указанных условий:

$$PVA = PMT\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}.$$

Подставляя данные количественные значения величин по условию, получим

$$PVA = 10\cdot 12\frac{1-\left(1+\frac{0{,}18}{12}\right)^{-12\cdot 3}}{0{,}18} = 276{,}607 \;\; \textit{тыс. р.}$$

При расчете величина годового платежа получена с учетом месячных выплат по кредиту и количества месяцев в году:

$$PMT = 10 \;\; \textit{тыс. р.} \cdot 12 = 120 \;\; \textit{тыс. р.}$$

7.6. Определение годового платежа по современной стоимости обычного аннуитета

Если необходимо решить задачу определения годовых выплат за n лет по известной величине современной (текущей) стоимости аннуитета, то можно воспользоваться формулой (95):

$$PMT = PVA\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \qquad (96)$$

В символической форме это соотношение имеет вид

$$PMT = PVA\cdot FM6,$$

где $FM6 = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ – функция сложных процентов, имеющая название ***«взнос на амортизацию единицы».***

Очевидно, что функция «взнос на амортизацию единичного вложения» обратна функции «коэффициент дисконтирования аннуитета»: $FM6 = \dfrac{1}{FM5}$.

Количественные значения функции приведены в финансовых таблицах в прил. 2. Формулы шести функций сложных процентов и решаемые задачи с их использованием приведены в прил. 3.

П р и м е р

Определить размер ежегодных равных срочных выплат по погашению кредита размером 1 млн. р., взятого под 20 % годовых на 5 лет.

Ежегодные выплаты по погашению долга составят:

$$PMT = 1\ 000\ 000 \cdot \frac{0{,}2}{1-(1+0{,}2)^{-5}} = 1\ 000\ 000 \cdot 0{,}3344 = 334{,}4 \ \textit{тыс. р.}$$

Общая формула расчета ежегодной суммы выплат по кредиту с учетом количества поступлений платежей и начислений процентов в году:

$$PMT = PVA\frac{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}. \qquad (97)$$

П р и м е р

Определите величину годовых выплат по кредиту, размером 250 тыс. р., взятому на 2 года под процентную ставку 18 % годовых с ежемесячным начислением процентов. Платежи по кредиту поступают ежеквартально.

По условию p > 1, m ≠ p. Для расчета используем формулу (97). Подставляя данные по условию задачи, получим сумму годовых выплат по кредиту:

$$PMT = 250\frac{4\left[\left(1+\frac{0{,}18}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1\right]}{1-\left(1+\frac{0{,}18}{12}\right)^{-12\cdot 2}} = 250 \cdot 0{,}608121 = 152{,}030 \ \textit{тыс. р.}$$

Величина квартальных выплат составит 152,030 / 4 = 38,008 тыс. р.

Выведем формулу размера ежемесячных аннуитетных платежей по ипотечному кредиту при ежемесячном начислении процентов (m = p = 12), используя формулу из табл. 38 для этого случая;

$$PVA = PMT\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}.$$

Сумма платежей за год составит

$$PMT = PVA\frac{j}{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}} = PVA\frac{j}{1-\left(1+\dfrac{j}{12}\right)^{-12n}}.$$

Отсюда размер ежемесячных аннуитетных платежей по ипотечному кредиту

$$PMT_{мес} = \frac{PVA}{12}\cdot\frac{j}{1-\left(1+\dfrac{j}{12}\right)^{-12n}} = PVA\frac{\dfrac{j}{12}}{1-\left(1+\dfrac{j}{12}\right)^{-12n}}, \qquad (98)$$

где $\dfrac{j}{12}$ – месячная ставка, $12n$ – количество месяцев за n лет.

7.7. Определение срока обычного аннуитета

Срок обычного аннуитета можно определить, исходя из известных значений его процентной ставки, годового платежа, наращенной суммы или современной величины.

Определим срок аннуитета, исходя из значения наращенной суммы за определенный период. Для этого воспользуемся формулой (88):

$$FVA = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

После преобразования

$$(1+i)^n = \frac{FVA}{PMT}\cdot i + 1.$$

Прологарифмируем полученное выражение:

$$n\cdot\ln(1+i) = \ln\left(\frac{FVA}{PMT}\cdot i + 1\right),$$

откуда

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{FVA}{PMT}\cdot i + 1)\right)}{\ln(1+i)}. \qquad (99)$$

П р и м е р

Предприятие планирует создать фонд накопления в размере 50 млн р. при ежегодных вносимых на банковский счет суммах в 2 млн р. под 15 % годовых. Определить срок, необходимый для создания фонда.

Используя формулу (99), получим

$$n=\frac{\ln\left(\frac{50}{2}\cdot 0{,}15+1\right)}{\ln(1+0{,}15)}=\frac{1{,}321756}{0{,}139762}=9{,}46\ \textit{года}.$$

Используя формулы, приведенные в табл. 37, можно вывести расчетные значения срока аннуитета при различных заданных условиях. Формулы для расчета продолжительности аннуитета по заданной величине наращенной суммы приведены в табл. 39.

Таблица 39

Формулы расчета продолжительности аннуитета при различных поступлениях платежей и начислений процентов в году

Количество поступлений платежей в году	Количество начислений процентов в году	Формула расчета срока аннуитета
$p = 1$	$m = 1$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{FVA}{PMT}\cdot i+1\right)}{\ln(1+i)}$
$p = 1$	$m>1$	$n=\dfrac{\ln\left\{\frac{FVA}{PMT}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right]+1\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
$p>1$	$m = 1$	$n=\dfrac{\ln\left\{\frac{FVA}{PMT}\cdot p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+i)}$
$p>1$	$m = p$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{FVA}{PMT}\cdot j+1\right)}{m\cdot\ln(1+\frac{j}{m})}$

Окончание табл. 39

Количество поступлений платежей в году	Количество начислений процентов в году	Формула расчета срока аннуитета
p >1	*m ≠ p*	$n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{FVA}{PMT}\cdot p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p-1}\right]+1\right\}}{m\cdot\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$

Для определения срока аннуитета по его известной современной (текущей) стоимости используется формула (94): $PVA = PMT\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Проделаем преобразования, представленные выше:

$$(1+i)^{-n} = 1-\frac{PVA}{PMT}\cdot i,$$

откуда после логарифмирования получим

$$n=\frac{-\ln\left(1-\dfrac{PVA}{PMT}\cdot i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{100}$$

Пример

Банк рассматривает условия предоставления кредита своему клиенту в размере 500 тыс. р. пдо 20 % годовых. На какой срок возможна выдача кредита, если клиент обязуется погашать выданный кредит ежегодными выплатами размером 140 тыс. р. в конце каждого года?

Расчеты проводим по формуле (100):

$$n=\frac{-\ln\left(1-\dfrac{500}{140}\cdot 0{,}2\right)}{\ln(1+0{,}2)}=\frac{1{,}25278}{0{,}18232}=6{,}85 \text{ г.}$$

Используя формулы, приведенные в табл. 38, можно вывести расчетные значения срока аннуитета при различных заданных условиях.

Формулы для расчета продолжительности аннуитета по известной современной его стоимости приведены в табл. 40.

Таблица 40

Формулы расчета продолжительности аннуитета при различных поступлениях платежей и начислений процентов в году

Количество поступлений платежей в году	Количество начислений процентов в году	Формула расчета срока аннуитета
$p = 1$	$m = 1$	$n = \dfrac{-\ln\left(1 - \dfrac{PVA}{PMT} \cdot i\right)}{\ln(1+i)}$
$p = 1$	$m > 1$	$n = \dfrac{-\ln\left\{1 - \dfrac{PVA}{PMT}\left[\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m} - 1\right]\right\}}{m \cdot \ln\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}$
$p > 1$	$m = 1$	$n = \dfrac{-\ln\left\{1 - \dfrac{PVA}{PMT} \cdot p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right\}}{\ln(1+i)}$
$p > 1$	$m = p$	$n = \dfrac{-\ln\left(1 - \dfrac{PVA}{PMT} \cdot j\right)}{m \cdot \ln\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}$
$p > 1$	$m \neq p$	$n = \dfrac{-\ln\left\{1 - \dfrac{PVA}{PMT} \cdot p\left[\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right] + 1\right\}}{m \cdot \ln\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}$

П р и м е р

Определить срок кредита, размером 500 тыс. р., взятого под процентную ставку 18 % годовых, если платежи в размере 180 тыс. р. и начисление процентов производятся ежемесячно.

Так как платежи и начисления процентов производятся ежемесячно, то m = p. Используем формулу для этого случая из табл. 40:

$$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{PVA}{PMT}\cdot j\right)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}=\frac{-\ln\left(1-\frac{600}{200}\cdot 0{,}18\right)}{12\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}18}{12}\right)}=\frac{-\ln(-0.8)}{12\cdot\ln 1{,}015}=\frac{0{,}77653}{0{,}17866}=4{,}35\ \textit{года}$$

7.8. Зависимость между современной и наращенной стоимостью обычного аннуитета

Очевидно, что при дисконтировании наращенной стоимости обычного аннуитета на текущий момент времени мы должны получить выражение для приведенной (современной) его стоимости. И, наоборот, при наращении приведенной стоимости аннуитета мы получим формулу наращенной его суммы (рис. 18).

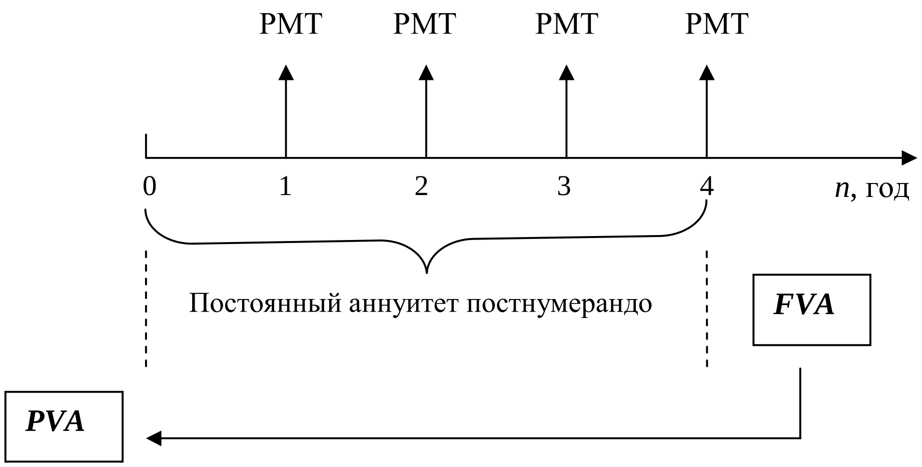


Рис. 18. Взаимосвязь наращенной и приведенной стоимостей обычного аннуитета

При дисконтировании наращенной суммы аннуитета (см. формулу (88)) получим

$$FVA\frac{1}{(1+i)^n}=PMT\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^n}=PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=PVA.$$

Таким образом,

$$FVA\frac{1}{(1+i)^n}=PVA. \qquad (101)$$

Откуда следует, что

$$PVA(1+i)^n = FVA. \tag{102}$$

7.9. Определение процентной ставки методом линейной интерполяции

Определение процентной ставки при сформированном денежном потоке предполагает решение уравнений (88) и (94) относительно i. Однако алгебраического решения этих уравнений нет. Нахождение искомой ставки возможно методом линейной интерполяции, широко применяемым в математических вычислениях.

7.9.1. Определение процентной ставки по известным параметрам FVA, PMT и n. Вычисление процентной ставки производится следующим образом:

$$i = i_н + \frac{FMЗ_{(n,i)} - FMЗ_{(н)}}{FMЗ_{(в)} - FMЗ_{(н)}} \cdot \left(i_{(в)} - i_{(н)}\right), \tag{103}$$

где $i_в$ и $i_н$ – верхнее и нижнее значения предполагаемой процентной ставки; $FMЗ_{(n,i)}$ – расчетное значение коэффициента наращения аннуитета при заданных значениях параметров *FVA* и *PMT*, найденное по формуле

$$FMЗ_{(n,i)} = \frac{FVA}{PMT};$$

$FMЗ_{(в)}$ и $FMЗ_{(н)}$ – значения коэффициентов наращения аннуитета при использовании верхних и нижних значений процентных ставок. Эти значения коэффициентов наращения находят по финансовым таблицам (прил. 2), по строке, соответствующей заданному сроку аннуитета n, как ближайшие к расчетному $FMЗ_{(n,i)}$.

При этом имеет место неравенство

$$FMЗ_{(н)} < FMЗ_{(n,i)} < FMЗ_{(в)}.$$

По финансовой таблице определяют процентные ставки $i_в$ и $i_н$, соответствующие $FMЗ_{(в)}$ и $FMЗ_{(н)}$. Искомая процентная ставка будет находиться между этими значениями ставок. Ее значение определяют по формуле (103).

Пример

В течение трех лет предполагается накопить сумму в размере 300 тыс. р., для чего планируется вносить на банковский депозит ежегодные взносы в конце года в размере 80 тыс. р. Определить значение процентной ставки при условии, что начисления процентов производятся ежегодно.

Определяем расчетное значение коэффициента наращения аннуитета

$$FM3_{(n,i)} = \frac{FVA}{PMT} = \frac{300}{80} = 3{,}75.$$

Находим значения коэффициентов наращения по финансовым таблицам (прил. 2), по строке, соответствующей заданному сроку аннуитета n = 3 годам, как ближайшие к расчетному: $FM3_{(в)}$ = 3,760225 и $FM3_{(н)}$ = 3,742900.

Значения наибольшей и наименьшей процентных ставок, соответствующих найденным коэффициентам наращения: $i_в$ = 23,5 % и $i_н$ = 23,0 %. Следовательно, искомая процентная ставка лежит в пределах

23,0 % < i < 23,5 %.

Находим значение искомой процентной ставки по формуле (103):

$$i = i_н + \frac{FM3_{(n,i)} - FM3_{(н)}}{FM3_{(в)} - FM3_{(н)}} \cdot \left(i_{(в)} - i_{(н)}\right) =$$

$$= 0{,}23 + \frac{3{,}75 - 3{,}742900}{3{,}760225 - 3{,}742900} \cdot (0{,}235 - 0{,}23) = 0{,}232.$$

Значение процентной ставки, по которой будут начислятся проценты по аннуитетным выплатам, равно 23,2 %.

Проведем проверку найденного значения, подставив его в формулу (88):

$$FVA = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 80\frac{(1+0{,}232)^3 - 1}{0{,}232} = 299{,}99 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, ставка 23,2 % обеспечивает наращение аннуитета до заданной суммы через 3 года.

7.9.2. Определение процентной ставки по известным параметрам PVA, PMT и n. Алгоритм нахождения процентной ставки в этом случае аналогичен рассмотренному ранее. Расчет искомой процентной ставки проводится по формуле

$$i = i_{(н)} + \frac{FM5_{(i,n)} - FM5_{(н)}}{FM5_{(в)} - FM_{(н)}} \cdot \left(i_{(в)} - i_{(н)}\right), \qquad (104)$$

где где $i_в$ и $i_н$ – верхнее и нижнее значения предполагаемой процентной ставки; $FM5_{(n,i)}$ – расчетное значение коэффициента приведения аннуитета при заданных значениях параметров *PVA* и *PMT*, найденное по формуле

$$FM5_{(n,i)} = \frac{PVA}{PMT};$$

$FM5_{(в)}$ и $FM5_{(н)}$ – коэффициенты приведения аннуитета при верхнем и нижнем значениях процентных ставок, определяемых по финансовым таблицам (прил. 2) как ближайшие к расчетному $FM5_{(n,i)}$.

Процентные ставки $i_в$ и $i_н$ находят как соответствующие табличным значениям коэффициентов приведения аннуитета $FM5_{(в)}$ и $FM5_{(н)}$. Значение искомой процентной ставки определяют по формуле (104).

7.10. Переменные аннуитеты постнумерандо

7.10.1. Аннуитеты с постоянным абсолютным изменением его элементов. Найдем выражение для приведенной стоимости аннуитета с постоянным годовым приростом a его элементов. Графическое представление такого аннуитета показано на рис. 19.

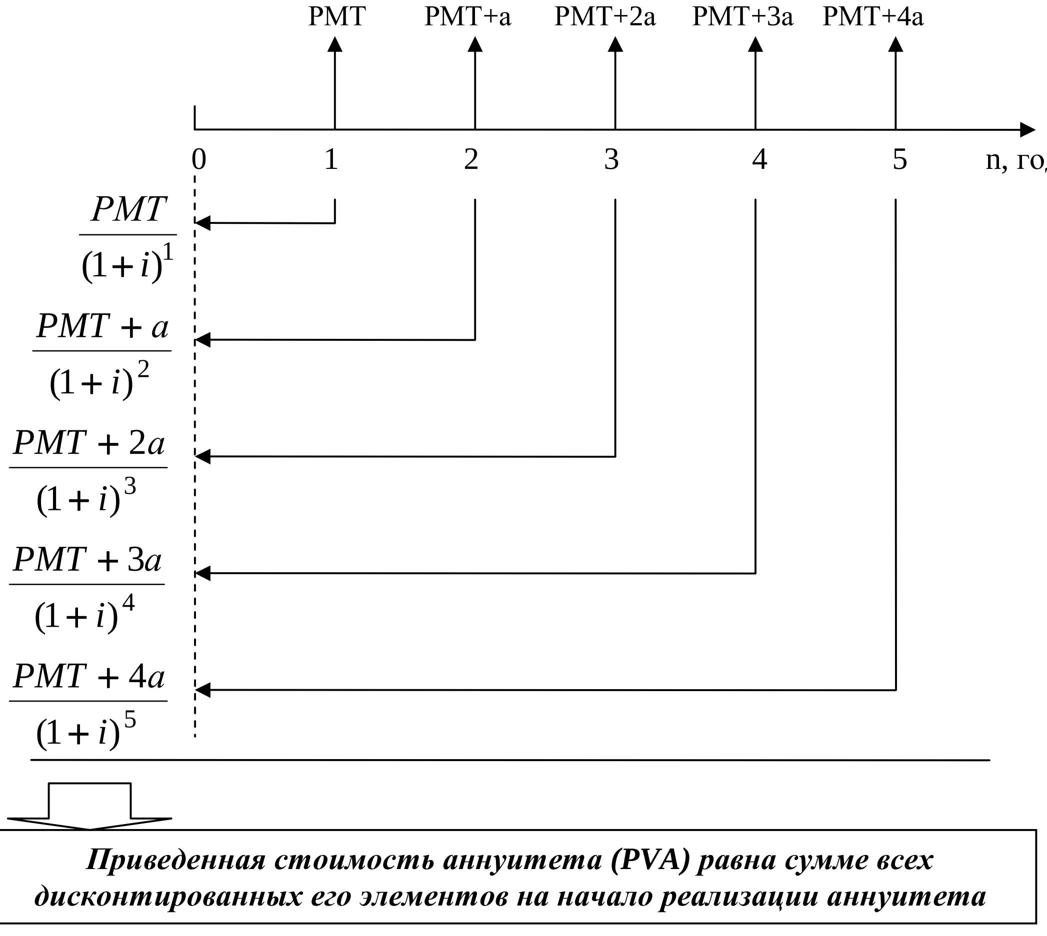


Рис.19. Формирование современной величины аннуитета постнумерандо с постоянным асолютным приростом его элементов

Очевидно, что

$$PVA = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT+a}{(1+i)^2} + \frac{PMT+2a}{(1+i)^3} + \frac{PMT+3a}{(1+i)^4} + \frac{PMT+4a}{(1+i)^5}.$$

В общем случае для n элементов геометрической прогрессии (n лет) формула расчета приведенной стоимости аннуитета

$$PVA = PMT(1+i)^{-1} + (PMT+a)(1+i)^{-2} + (PMT+2a) + \ldots +$$
$$+ \left[PMT + (n-1)a\right](1+i)^{-n}. \quad (105)$$

Проведем преобразования: умножим это равенство на (1 + i) и вычтем из обеих сторон полученного выражения соответствующие стороны выше записанного равенства.

После несложных преобразований окончательно получим

$$PVA = \left(PMT + \frac{a}{i}\right)FM5 - \frac{an}{i(1+i)^n}, \quad (106)$$

где $FM5 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – **коэффициент приведения аннуитета**.

Вывод формулы (106) предлагается студентам сделать самостоятельно.

Умножив выражение (106) на $(1+i)^n$, получим формулу расчета наращенной суммы аннуитета

$$FVA = \left(PMT + \frac{a}{i}\right)FM3 - \frac{an}{i}, \quad (107)$$

где $FM3 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения аннуитета.

П р и м е р

По условиям договора платежи вносятся в конце года в течение четырех лет. Первый платеж составляет 500 тыс. р. В течение последующих трех лет его величина увеличивается на 100 тыс. р. Определить текущую стоимость денежного потока по ставке дисконтирования 12 % годовых.

Найдем по финансовым таблицам значение коэффициента приведения годового аннуитета FM4 = 3,0373. Подставив это выражение в (20) получим

$$PVA = \left(500 + \frac{100}{0{,}12}\right)3{,}0373 - \frac{100 \cdot 4}{0{,}12} = 1931{,}34 \text{ тыс. р.}$$

7.10.2. Аннуитеты с постоянным относительным приростом элементов. Процесс дисконтирования элементов аннуитета с постоянным относительным приростом его элементов представлен на рис. 20.

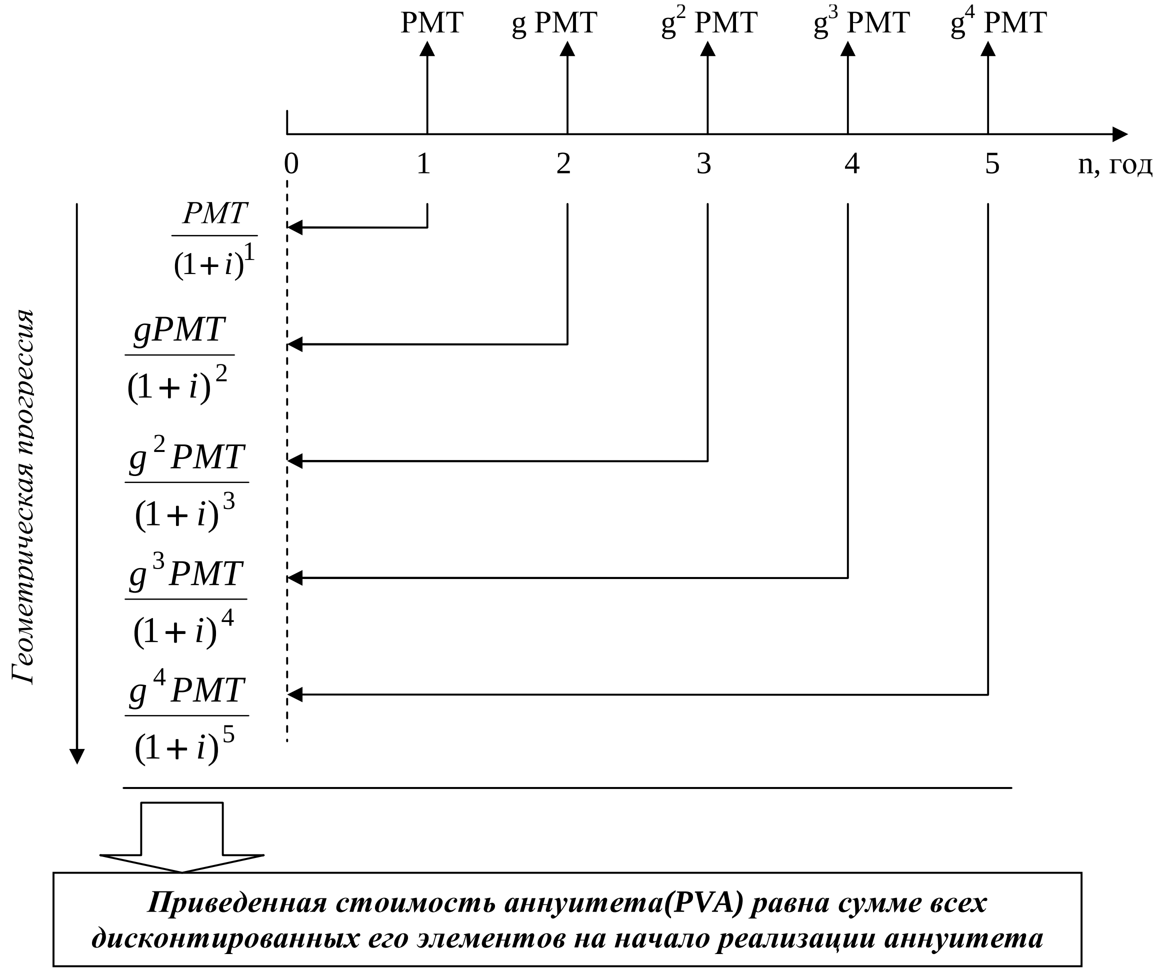


Рис. 20. Формирование приведенной величины аннуитета постнумерандо с ежегодным относительным приростом элементов

Последовательность дисконтированных элементов аннуитета представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{g}{(1+i)}$.

Так как приведенная стоимость аннуитета (PVA) равна сумме всех дисконтированных элементов на начало реализации аннуитета, воспользуемся для расчета формулой (21).

В результате получим

$$PVA = \frac{PMT}{(1+i)} \cdot \frac{\dfrac{g^n}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{g}{(1+i)} - 1} = \frac{PMT}{(1+i)} \cdot \frac{g^n (1+i)^{-n} - 1}{\dfrac{g-(1+i)}{(1+i)}} = PMT \frac{1 - g^n (1+i)^{-n}}{(1+i) - g}.$$

Таким образом, приведенная стоимость аннуитета с постоянным относительным приростом

$$PVA = PMT \frac{1 - g^n (1+i)^{-n}}{(1+i) - g}. \qquad (108)$$

Наращенная сумма аннуитета с постоянным приростом его элементов определится из соотношения

$$FVA = PVA(1+i)^n = PMT \frac{1 - g^n (1+i)^{-n}}{(1+i) - g} (1+i)^n.$$

Окончательно имеем

$$FVA = PMT \frac{(1+i)^n - g^n}{(1+i) - g}. \qquad (109)$$

П р и м е р

По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 5 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 30 тыс. р., а каждый последующий по отношению к предыдущему увеличивается на 10 %. Оценить этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 12 % годовых.

Увеличение платежа на 10 % означает его рост в 1,1 раза.

Будущая стоимость такого аннуитета

$$FVA = PMT \frac{(1+i)^n - g^n}{(1+i) - g} = 30 \frac{(1+0{,}12)^5 - 1{,}1^5}{(1+0{,}12) - 1{,}1} = 227{,}748 \text{ \textit{тыс. р.}}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Чем объясняется достаточно большое распространение на практике потока постнумерандо?*
2. *В рамках решения каких задач может выполняться оценка денежного потока?*
3. *Что собой представляют наращенная сумма и современная стоимость аннуитета?*
4. *Каков экономический смысл коэффициента наращения аннуитета?*
5. *Как изменяется коэффициент наращения аннуитета в зависимости от размера процентной ставки и срока действия аннуитета?*
6. *Каков экономический смысл коэффициента дисконтирования аннуитета?*
7. *Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета в зависимости от размера процентной ставки и срока действия аннуитета?*
8. *Как рассчитать ежемесячные аннуитетные выплаты по ипотечному кредиту?*
9. *Как взаимосвязаны будущая и современная стоимости аннуитета?*
10. *Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным и относительным изменением его элементов.*

ЗАДАНИЯ

Используя формулы (88) – (110), решите следующие задачи с объяснением полученных результатов.

7.1. Фирма создает фонд накопления. Для этого ежемесячно в течение n лет переводит в банк $PMT_{мес}$ тыс. р. под годовую процентную ставку i %. Проценты начисляются ежемесячно. На основе исходных данных табл. 41 определите размер фонда накопления в конце планируемого срока.

Таблица 41

Номер варианта	*$PMT_{мес}$, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*$PMT_{мес}$, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	500	3	18	***16***	140	3	14
2	100	5	12	***17***	160	5	15
3	50	4	14	***18***	400	6	14
4	300	6	12	***19***	500	8	11
5	200	7	16	***20***	300	5	14
6	150	4	10	***21***	180	4	18
7	120	6	19	***22***	550	7	10
8	200	3	15	***23***	150	3	16
9	300	5	13	***24***	220	5	10
10	130	4	12	***25***	100	6	15
11	150	8	13	***26***	130	4	18
12	300	6	10	***27***	250	6	12
13	80	4	12	***28***	300	4	16
14	200	7	11	***29***	280	3	14
15	100	5	13	***30***	360	5	17

7.2. Организация получила кредит на *n* лет. Годовая процентная ставка за пользование кредитом – *i* %. Кредит погашается ежемесячными аннуитетными платежами. На основе исходных данных табл. 42 определите величину месячного платежа и общую стоимость кредита.

Таблица 42

Номер варианта	*Размер кредита, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*Размер кредита, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	1 400	3	18	***16***	5 000	3	14
2	1 600	5	12	***17***	1 000	5	15
3	4 000	4	14	***18***	1 500	6	14
4	5 000	6	12	***19***	3 000	8	11
5	3 000	7	16	***20***	2 000	5	14
6	1 800	4	10	***21***	1 500	4	18
7	5 500	6	19	***22***	1 200	7	10
8	1 500	3	15	***23***	2 000	3	16
9	2 200	5	13	***24***	3 000	5	10
10	1 000	4	12	***25***	1 300	6	15
11	1 300	8	13	***26***	1 500	4	18
12	2 500	6	10	***27***	3 000	6	12
13	3 000	4	12	***28***	1 800	4	16
14	2 800	7	11	***29***	2 000	3	14
15	3 600	5	13	***30***	1 000	5	17

7.3. Страховая компания, заключив на *n* лет договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по $PMT_{кв}$ тыс. р. в конце каждого квартала. Эти взносы компания помещает в банк под годовую процентную ставку *i* %. Найдите приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если сложные проценты банком начисляются ежемесячно.

Исходные данные представлены в табл. 43.

Таблица 43

Номер варианта	$PMT_{кв}$, *тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	$PMT_{кв}$, *тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	60	5	16	***16***	60	4	15
2	20	3	14	***17***	50	3	14
3	40	5	15	***18***	40	5	13
4	50	4	14	***19***	50	6	12
5	60	6	12	***20***	30	4	15
6	50	3	14	***21***	10	7	14
7	20	5	15	***22***	30	4	13
8	30	4	14	***23***	50	5	12
9	40	6	12	***24***	20	6	16

10	30	4	14	***25***	10	7	14
11	50	5	12	***26***	30	5	15
12	30	4	16	***27***	20	4	13
13	60	3	13	***28***	30	5	12
14	20	5	15	***29***	20	6	16
15	10	4	12	**30**	60	5	15

7.4. Организация создает резервный фонд, для чего ежегодно в конце года переводит в банк *PMT* тыс. р. Определите срок, за который на счету у организации будет *FVA* тыс. р. при годовой процентной ставке *i* % и начислении процентов один раз в год. Исходные данные представлены в табл. 44.

Таблица 44

Номер варианта	*PMT, тыс. р.*	*FVA, тыс. р.*	*i, %*	*Номер варианта*	*PMT, тыс. р.*	*FVA, тыс. р.*	*i, %*
1	300	1 200	15	***16***	500	2 400	16
2	400	1 600	14	***17***	600	4 800	14
3	600	1 500	13	***18***	800	5 200	15
4	500	2 600	12	***19***	300	2 600	14
5	800	3 500	15	***20***	500	4 400	12
6	400	1 800	14	***21***	200	1 800	14
7	600	4 200	13	***22***	400	2 200	15
8	500	2 400	12	***23***	600	4 600	14
9	700	6 400	16	***24***	300	1 800	12
10	500	4 000	14	***25***	800	5 000	14
11	400	2 600	15	***26***	700	5 400	12
12	200	1 200	13	***27***	100	1 000	16
13	800	3 600	12	***28***	400	5 100	13
14	400	2 800	16	***29***	300	4 500	15
15	200	1 500	15	**30**	500	5 500	12

7.5. Участок сдан в аренду на *n* лет. Сумма первого годового арендного платежа (схема постнумерандо) составляет *PMT* тыс. р. Причем каждый год происходит индексация величины платежа на 5 %. Рассчитайте текущую цену договора на момент его заключения, если сложная банковская процентная ставка равна *i* % годовых. Исходные данные представлены в табл. 45.

Таблица 45

Номер варианта	*PMT, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*PMT, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
1	200	5	12	***16***	640	6	16
2	400	8	13	***17***	560	5	12
3	240	10	15	***18***	800	6	15
4	600	8	13	***19***	900	8	12
5	400	6	14	***20***	300	5	13
6	680	4	12	***21***	480	4	16

7	420	6	14	***22***	840	7	15
8	800	8	15	***23***	600	6	17
9	200	5	16	***24***	820	5	13
10	450	9	12	***25***	500	6	11
11	500	8	13	***26***	660	4	10
12	700	6	15	***27***	380	6	15

Окончание табл. 45

Номер варианта	*PMT, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*	*Номер варианта*	*PMT, тыс. р.*	*n, год*	*i, %*
13	300	4	14	***28***	800	4	14
14	400	7	16	***29***	580	10	16
15	600	5	12	**30**	460	5	13

7.6. Определите процентную ставку доходности ценной бумаги, текущей стоимостью *PVA* р., генерирующую ежегодный доход в размере *PMT* р. в течение *n* лет. Исходные данные представлены в табл. 46.

Таблица 46

Номер варианта	*PVA , р.*	*PMT, р.*	*n, год*	*Номер варианта*	*PVA р.*	*PMT, р.*	*n, год*
1	5 400	1 000	12	***16***	5 000	980	16
2	5 600	1 100	9	***17***	5 200	1 300	10
3	4 600	800	12	***18***	6 500	1 400	16
4	5 800	1 200	10	***19***	5 600	1 200	14
5	3 800	600	16	***20***	4 800	900	15
6	5 800	800	18	***21***	5 500	960	20
7	5 600	900	12	***22***	6 200	1 300	12
8	6 500	1 100	13	***23***	6 000	1 400	10
9	5 200	900	14	***24***	5 400	1 100	14
10	6 000	1 200	19	***25***	5 300	1 200	10
11	5 300	1 000	18	***26***	5 500	1 150	14
12	6 200	1 400	16	***27***	5 400	1 050	16
13	5 000	800	19	***28***	4 800	750	15
14	4 800	600	20	***29***	6 200	1 460	12
15	3 600	500	22	**30**	5 000	1 000	14

7.7. Рассчитайте величину месячных аннуитетных платежей по ипотечному кредиту, который необходим для покупки квартиры. Проценты за кредит начисляются ежемесячно. Стоимость приобретаемой квартиры выберите сами. Условия ипотечного кредитования возьмите на примере конкретного коммерческого банка. Во сколько раз полная стоимость кредита в конце срока превысит размер требуемого кредита?

7.8. Определите сумму автокредита, если по условию банка размер месячных платежей должен составлять 40 % от вашего дохода за месяц. Проценты за кредит начисляются ежемесячно. Срок кредита и процентную ставку возьмите, исходя из условий конкретного коммерческого банка.

7.9. Текущая стоимость годовой обычной ренты сроком *n* лет равна *PVA* тыс. р. Наращенная стоимость составляет *FVA* тыс. р. Определите годовую процентную ставку, если начисление процентов производится один раз в год.

Исходные данные представлены в табл. 47.

Таблица 47

Номер варианта	*PVA, тыс. р.*	*FVA, тыс. р.*	*n, год*	*Номер варианта*	*PVA, тыс. р.*	*FVA, тыс. р.*	*n, год*
1	200	800	5	***16***	600	3 600	6
2	300	900	4	***17***	500	1 800	4
3	400	1 500	5	***18***	400	2 200	5
4	600	1 600	2	***19***	300	1 600	4
5	200	2 500	5	***20***	200	2 400	8
6	300	1 200	4	***21***	300	1 800	6
7	500	3 200	5	***22***	400	2 200	5
8	300	1 400	8	***23***	500	2 000	4
9	400	2 400	6	***24***	600	1 600	2
10	600	2 000	4	***25***	700	4 000	6
11	500	1 600	5	***26***	300	1 500	5
12	300	1 000	3	***27***	400	2 000	6
13	400	2 600	5	***28***	200	800	4
14	200	1 200	6	***29***	500	1 500	3
15	500	2 500	5	**30**	600	3 200	6

7.10. Определите срок, на который необходимо взять ипотечный кредит на покупку квартиры. При проведении расчетов необходимо учесть следующие условия: размер аннуитетных месячных платежей должен составлять 50 % от вашего дохода, проценты за кредит банком начисляются ежемесячно, стоимость квартиры определите на основе рыночной информации, уровень процентной ставки по кредиту должен соответствовать условиям Сбербанка РФ.

7.11. Вы имеете возможность инвестировать одинаковую сумму в один из двух проектов. Первый проект позволит получить ренту постнумерандо с ежегодными выплатами в размере 20 тыс. долл. в течение 25 лет. Второй проект в течение двух лет принесет соответственно 40 тыс. долл. и 100 тыс. долл. Какой из этих двух проектов лучше, если предполагаемая ставка доходности – 25 % годовых. Можно ли так изменить процентную ставку, чтобы ответ изменился на противоположный?

7.12. Арендовано оборудование сроком на 10 лет. Плата за эксплуатацию оборудования будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые 4 года – по 40 тыс. долл., в оставшиеся 6 лет – по 45 тыс. долл. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если ставка доходности, используемая аналитиком, равна 23 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Владение методами экономических и финансовых вычислений является одной из основных составляющих в профессиональной подготовке менеджеров, экономистов, финансистов, предпринимателей, банковских работников и т. д.

Знания, приобретенные в процессе изучения курса «Методы экономических расчетов и анализа», будут востребованы в следующих направлениях:

– экономика предприятий: учет инфляции в экономических расчетах, погашение задолженностей по кредитам коммерческих банков, расчет эффективности вложенного капитала, расчеты по лизинговым операциям и др.;

– экономика недвижимости: временная оценка денежных потоков, использование шести функций сложных процентов в оценке стоимости объектов недвижимости, дисконтирование денежных потоков, учет удорожания недвижимости в сравнительном подходе при оценке недвижимости и др.;

– оценка бизнеса: проведение расчетов по оценке имущества и имущественных прав, определение капитализированной стоимости доходов предприятия, дисконтирование денежных потоков при оценке бизнеса, учет инфляционных процессов в экономике и др.;

– экономическая оценка инвестиций: технико-экономическое обоснование инвестиционного проекта, расчет показателей эффективности инвестиционного проекта (чистый дисконтированный доход, дисконтированный срок окупаемости, внутренняя норма доходности и др.), оценка эффективности и финансовой реализуемости проекта для различных участников, влияние инфляции на эффективность проекта и др.;

– планирование: технико-экономическое обоснование бизнес-планов, планирование погашение долгосрочной задолженности, проведение расчетов при разработке инновационно-инвестиционных планов предприятия, прогнозирование роста цен на продукцию в планируемом периоде с учетом анализа соответствующих сегментов рынка, разработка планов материально-технического обеспечения с учетом роста цен на сырье и материалов и др.;

– финансы и кредит: реальная доходность финансовых операций, различные схемы кредитования, учет инфляции в финансово-кредитных операциях, учет векселей, налогообложение процентов в депозитных операциях, операции с конверсией валюты, и др.;

– страхование: актуарные расчеты в страховании.

Объем учебного пособия охватывает лишь часть теории и практики по финансово-экономическим вычислениям. Расширить знания в этом направлении помогут учебные издания, представленные в списке литературных источников. Эти знания помогут студентам более эффективно освоить материал при изучении последующих курсов различных дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бабешко Л. О.* Математическое моделирование финансовой деятельности : учеб. пособие / Л. О. Бабешко. – М. : КНОРУС, 2011. – 224 с.
2. *Башарин Г. П.* Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – М. : ИНФРА-М, 1997. – 160 с.
3. *Бочаров П. П.* Финансовая математика / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М. : Гардарики, 2002. – 624 с.
4. Финансовая математика : учеб. пособие / П. Н. Брусов, П. П. Брусов, Н. П. Орехова, С. В. Скородулина. – М. : КНОРУС, 2010. – 224 с.
5. *Бухвалов А*. В. Самоучитель по финансовым расчетам / А. В. Бухвалов, А. В. Идельсон. – М. : Мир, Пресс-сервис, 1997. – 176 с.
6. *Ершов Ю. С.* Финансовая математика в вопросах и ответах : учеб. пособие / Ю. С. Ершов. – Новосибирск : Сибирское соглашение, 1999. – 160 с.
7. Ефимова М. Р. Финансово-экономические расчеты: пособие для менеджеров : учеб. пособие / М. Р. Ефимова. – М. : ИНФРА-М, 2004. –185 с.
8. *Капельян С. Н.* Основы коммерческих и финансовых расчетов / С. Н. Капельян, О. А. Левкович. – Минск : НТЦ «АПИ», 1999. – 224 с.
9. *Капитоненко В. В.* Задачи и тесты по финансовой математике : учеб. пособие / В. В. Капитоненко. – М. : Фиансы и статистика, 2007. – 256 с.
10. *Ковалев В. В.* Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 328 с.
11. *Кочерыгов А. А.* Финансовая математика / А. А. Кочерыгов. – Ростов н/Д : Феникс, 2004. – 480 с.
12. *Кузнецов В. Т.* Финансовая математика: учеб. пособие для вузов / В. Т. Кузнецов. – М. : Экзамен, 2005. – 128 с.
13. *Малыхин В. И.* Финансовая математика / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 247 с.
14. *Мелкумов Я. С.* Финансовые вычисления: теория и практика : учеб.-справ. пособие / Я. С. Мелкумов. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 406 с.
15. *Уланов В. А.* Сборник задач по курсу финансовых вычислений / *В. А. Уланов*, под ред. В. В. Ковалева. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 400 с.
16. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций / под ред. В. А. Половникова, А. И. Пилипенко. – М. : Вузовский учебник, 2004. – 360 с.
17. *Цымбаленко С. В.* Финансовые вычисления / С. В. Цымбаленко, Т. Т. Цымбаленко. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 160 с.
18. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – М. : Дело,

2000. – 400 с.

19. *Кочович Е.* Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов : пер с серб. / Е. Кочович. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

Приложение 1

ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА ДНЕЙ В ГОДУ

День месяца	**Месяц**											
	Янв.	**Фев.**	**Март**	**Апр.**	**Май**	**Июнь**	**Июль**	**Авг.**	**Сент.**	**Окт.**	**Нояб.**	**Дек.**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Коэффициент наращения $FM1 = (1+i)^n$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000	1,11000	1,12000	1,13000	1,14000	1,15000
2	1,14490	1,16640	1,18810	1,21000	1,23210	1,25440	1,27690	1,29960	1,32250
3	1,22504	1,25971	1,29503	1,33100	1,36763	1,40493	1,44290	1,48154	1,52088
4	1,31080	1,36049	1,41158	1,46410	1,51807	1,57352	1,63047	1,68896	1,74901
5	1,40255	1,46933	1,53862	1,61051	1,68506	1,76234	1,84244	1,92541	2,01136
6	1,50073	1,58687	1,67710	1,77156	1,87041	1,97382	2,08195	2,19497	2,31306
7	1,60578	1,71382	1,82804	1,94872	2,07616	2,21068	2,35261	2,50227	2,66002
8	1,71819	1,85093	1,99256	2,14359	2,30454	2,47596	2,65844	2,85259	3,05902
9	1,83846	1,99900	2,17189	2,35795	2,55804	2,77308	3,00404	3,25195	3,51788
10	1,96715	2,15893	2,36736	2,59374	2,83942	3,10585	3,39457	3,70722	4,04556
11	2,10485	2,33164	2,58043	2,85312	3,15176	3,47855	3,83586	4,22623	4,65239
12	2,25219	2,51817	2,81266	3,13843	3,49845	3,89598	4,33452	4,81790	5,35025
13	2,40985	2,71962	3,06580	3,45227	3,88328	4,36349	4,89801	5,49241	6,15279
14	2,57853	2,93719	3,34173	3,79750	4,31044	4,88711	5,53475	6,26135	7,07571
15	2,75903	3,17217	3,64248	4,17725	4,78459	5,47357	6,25427	7,13794	8,13706
16	2,95216	3,42594	3,97031	4,59497	5,31089	6,13039	7,06733	8,13725	9,35762
17	3,15882	3,70002	4,32763	5,05447	5,89051	6,86604	7,98608	9,27646	10,7613
18	3,37993	3,99602	4,71712	5,55992	6,54355	7,38997	9,02427	10,5752	13,3755
19	3,61652	4,31570	5,14166	6,11591	7,26334	8,61276	10,1974	12,0557	14,2318
20	3,86969	4,66096	5,60441	6,72750	8,06231	9,64629	11,5231	13,7435	16,3665

Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,16000	1,17000	1,18000	1,19000	1,20000	1,21000	1,22000	1,23000	1,24000
2	1,34560	1,36890	1,39240	1,41610	1,44000	1,46410	1,48840	1,51290	1,53760
3	1,56090	1,60161	1,64303	1,68516	1,72800	1,77156	1,81585	1,86087	1,90662
4	1,81064	1,87389	1,93878	2,00534	2,07360	2,14359	2,21533	2,28887	2,36421
5	2,10034	2,19245	2,28776	2,38635	2,48832	2,59374	2,70271	2,81531	2,93162
6	2,43640	2,56516	2,69955	2,83976	2,98598	3,13843	3,29730	3,46283	3,63521
7	2,82622	3,00124	3,18547	3,37932	3,58318	3,79750	4,02271	4,25928	4,50767
8	3,27841	3,51145	3,75886	4,02139	4,29982	4,59497	4,90771	5,23891	5,558951
9	3,80296	4,10840	4,43545	4,78545	5,15978	5,55992	5,98740	6,44386	6,93099
10	4,41143	4,80683	5,23384	5,69468	6,19174	6,72750	7,30463	7,92595	8,59443
11	5,11726	5,62399	6,17593	6,77667	7,43008	8,14027	8,91165	9,74891	10,6571
12	5,93603	6,58007	7,28759	8,06424	8,91610	9,84973	10,8722	11,9912	13,2148
13	6,88579	7,69868	8,59936	9,59645	10,6993	11,9182	13,2641	14,7491	16,3863
14	7,98752	9,0075	10,1472	11,4198	12,8392	14,4210	16,1822	18,1414	20,3191
15	9,26552	10,5387	11,9738	13,5895	15,4070	17,4494	19,7423	22,3134	25,1956
16	10,7480	12,3303	14,1290	16,1715	18,4884	21,1128	24,0856	27,4462	31,2426
17	12,4677	14,4265	16,6723	19,2441	22,1861	25,5477	29,3844	33,7588	38,7408
18	14,4625	16,8790	19,6733	22,9005	26,6233	30,9127	35,8490	41,5233	48,0386
19	16,7765	19,7484	23,2144	27,2516	31,9480	37,4043	43,7358	51,0737	59,5679
20	19,4608	23,1056	27,3930	32,4294	38,3376	45,2593	53,3576	62,8206	73,8641

Продолжение прил. 2

Коэффициент дисконтирования $FM\,2 = \dfrac{1}{(1+i)^n}$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909	0,90090	0,89286	0,88496	0,87719	0,86957
2	0,87344	0,85734	0,84168	0,82645	0,81162	0,79719	0,78315	0,76947	0,75614
3	0,81630	0,79383	0,77218	0,75131	0,73119	0,71178	0,69305	0,67497	0,65752
4	0,76290	0,73503	0,70843	0,68301	0,65873	0,63551	0,61332	0,59208	0,57175
5	0,71299	0,68058	0,64993	0,62092	0,59345	0,56743	0,542760	0,51937	0,49718
6	0,66634	0,63017	0,59627	0,56447	0,53464	0,50663	0,48032	0,45559	0,43233
7	0,62275	0,58349	0,54703	0,51316	0,48166	0,45235	0,42506	0,39964	0,37594
8	0,58201	0,54027	0,50187	0,46651	0,43393	0,40388	0,37616	0,35056	0,32690
9	0,54393	0,50025	0,46043	0,42410	0,39092	0,36061	0,33288	0,30751	0,28426
10	0,50835	0,46319	0,42241	0,38554	0,35218	0,32197	0,29459	0,26974	0,24718
11	0,47509	0,42888	0,38753	0,35049	0,31728	0,28748	0,26070	0,23662	0,21494
12	0,44401	0,39711	0,35553	0,31863	0,28584	0,25668	0,23071	0,20756	0,18691
13	0,41496	0,36770	0,32618	0,28966	0,25751	0,22917	0,20416	0,18207	0,16253
14	0,38782	0,34046	0,29925	0,26333	0,23199	0,20462	0,18068	0,15971	0,14133
15	0,36245	0,31524	0,27454	0,23939	0,20900	0,18270	0,15989	0,14010	0,12289
16	0,33873	0,29189	0,25187	0,21763	0,18829	0,16312	0,14150	0,12289	0,10686
17	0,31657	0,2702/	0,23107	0,19784	0,16963	0,14564	0,12522	0,107890	0,09293
18	0,29586	0,25025	0,21199	0,17986	0,15282	0,13004	0,11081	0,09456	0,08081
19	0,27651	0,23171	0,19449	0,16351	0,13768	0,11611	0,09806	0,08295	0,07027
20	0,25842	0,21455	0,17843	0,14864	0,12403	0,10367	0,08678	0,07276	0,06110
Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0,86207	0,85470	0,84746	0,84034	0,83333	0,82645	0,81967	0,81301	0,80645
2	0,74316	0,73051	0,71818	0,70616	0,69444	0,68301	0,67186	0,66098	0,65036
3	0,64066	0,62437	0,60863	0,59342	0,57870	0,56447	0,55071	0,53738	0,52449
4	0,55229	0,53365	0,51579	0,49867	0,48225	0,46651	0,45140	0,43690	0,42297
5	0,47611	0,45611	0,43711	0,41905	0,40188	0,38554	0,37000	0,35520	0,34111
6	0,41044	0,38984	0,37043	0,35214	0,33490	0,31863	0,30328	0,28878	0,27509
7	0,35383	0,33320	0,31393	0,29592	0,27908	0,26333	0,24859	0,23478	0,22184
8	0,30503	0,28478	0,26604	0,24867	0,23257	0,21763	0,20376	0,19088	0,17891
9	0,26295	0,24340	0,22546	0,20897	0,19381	0,17986	0,16702	0,15519	0,14428
10	0,22668	0,20804	0,19106	0,17560	0,16151	0,14864	0,13690	0,12617	0,11635
11	0,19542	0,17781	0,16192	0,14757	0,13459	0,12285	0,11221	0,10258	0,09383
12	0,16846	0,15197	0,13722	0,12400	0,11216	0,10153	0,09198	0,08339	0,07567
13	0,14523	0,12989	0,11629	0,10421	0,09346	0,08391	0,07539	0,06780	0,06103
14	0,12520	0,11102	0,09855	0,08757	0,07789	0,06934	0,06180	0,05512	0,04921
15	0,10793	0,09489	0,08352	0,07359	0,06491	0,05731	0,05065	0,04481	0,03969
16	0,09304	0,08110	0,07078	0,06184	0,05409	0,04736	0,04152	0,03643	0,03201
17	0,08021	0,06932	0,05998	0,05196	0,04507	0,03914	0,03403	0,02962	0,02581
18	0,06914	0,05925	0,05083	0,04367	0,03756	0,03235	0,02789	0,02408	0,02082
19	0,05961	0,05064	0,04308	0,03670	0,03130	0,02673	0,02286	0,01958	0,01679
20	0,05139	0,04328	0,03651	0,03084	0,02608	0,02209	0,01874	0,01592	0,01354

Продолжение прил. 2

Коэффициент наращения аннуитета $FM3 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,07000	2,0800	2,09000	2,10000	2,11000	2,12000	2,13000	2,14000	2,15000
3	3,21490	3,24640	3,27810	3,31000	3,34210	3,37440	3,40690	3,43960	3,47250
4	4,43994	4,50611	4,57313	4,64100	4,70973	4,77933	4,84980	4,92114	4,99338
5	5,75074	5,86660	5,98471	6,10510	6,22780	6,35285	6,48027	6,61010	6,74238
6	7,15329	7,33593	7,52334	7,71561	7,91286	8,11519	8,32271	8,53552	8,75374
7	8,65402	8,92280	9,20044	9,48717	9,78327	10,0890	10,4047	10,7305	11,0668
8	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359	11,8594	12,2997	12,7573	13,2328	13,7268
9	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795	14,1640	14,7757	15,4157	16,0854	16,7858
10	13,8165	14,4866	15,1929	15,9374	16,7220	17,5487	18,4198	19,3373	20,3037
11	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312	19,5614	20,6546	21,8143	23,0445	24,3493
12	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843	22,7132	24,1331	25,6502	27,2708	29,0017
13	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227	26,2117	28,0291	29,9847	32,0887	34,3519
14	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750	30,0949	32,3926	34,8827	37,5811	40,5047
15	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725	34,4054	37,2797	40,4175	43,8424	47,5804
16	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497	39,1900	42,7533	46,6717	50,9804	55,7175
17	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447	44,5009	48,8837	53,7391	591176	65,0751
18	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992	50,3960	55,7497	61,7251	68,3941	75,8364
19	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591	56,9395	63,4397	70,7494	78,9692	88,2118
20	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750	64,2028	72,0524	80,9468	91,0249	102,4436

Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,16000	2,17000	2,18000	2,19000	2,20000	2,21000	2,22000	2,23000	2,24000
3	3,50560	3,53890	3,57240	3,60610	3,64000	3,67410	3,70840	3,74290	3,77760
4	5,06650	5,14051	5,21543	5,29126	5,36800	5,44566	5,52425	5,60377	5,68422
5	6,87714	7,01440	7,15421	7,29660	7,44160	7,58925	7,73958	7,89263	8,04844
6	8,97748	9,20685	9,44197	9,68295	9,92992	10,1830	10,4423	10,7079	10,9801
7	11,4139	11,7720	12,1415	12,5227	12,9159	13,3214	13,7396	14,1708	14,6153
8	14.2401	14,7733	15,3270	15,9020	16,4991	17,1189	17,7623	18,4300	18,0523
9	16,5185	18,2847	19,0859	19,9234	20,7989	21,7139	22,6700	23,6690	24,7125
10	20,3215	22,3931	23,5213	24,7089	25,9587	27,2738	28,6574	30,1128	31,6434
11	25,7329	27,1999	28,7552	30,4036	32,1504	34,0013	35,9621	38,0388	40,2379
12	30,8502	32,8239	34.9311	37,1802	39,5805	42,1416	44,8737	47,7877	50,8950
13	36,7862	39,4040	42,2187	45,2445	48,4966	51,9913	55,7459	59,7788	64,1097
14	43,6720	47,1027	50,8180	54,8409	59,1959	63,9095	69,0100	74,5280	80,4961
15	51,6595	56,1101	60,9653	66,2607	72,0351	78,3305	85,1922	92,6694	100,815
16	60,9250	66,6489	72,9390	79,8502	87,4421	95,7799	104,935	114,983	126,011
17	71,6730	78,9792	87,0680	96,0218	105,931	116,984	129,020	142,430	157,253
18	84,1407	93,4056	103,740	115,266	128,117	142,441	158,105	176,188	195,994
19	98,6032	110,285	123,414	138,166	154,740	173,354	194,254	217,712	224,033
20	115,380	130,033	146,628	165,418	186,688	210,758	237,989	268,785	303,601

Продолжение прил. 2

Фактор фонда возмещения $FM4 = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,48309	0,48077	0,47847	0,47619	0,47393	0,47393	0,46948	0,46729	0,46512
3	0,31105	0,30803	0,30505	0,30211	0,29921	0,29921	0,29352	0,29073	0,28798
4	0,22523	0,22192	0,21867	0,21547	0,21233	0,21233	0,20619	0,20320	0,20027
5	0,17389	0,17046	0,16709.	0,16380	0,16057	0,16057	0,15431	0,15128	0,14832
6	0,13980	0,13632	0,13292	0,12961	0,12638	0,12638	0,12015	0,11716	0,11424
7	0,11555	0,11207	0,10870	0,10541	0,10222	0,10222	0,09611	0,09319	0,09036
8	0,09747	0,09402	0,09067	0,08744	0,08432	0,08432	0,07839	0,07557	0,07285
9	0,08349	0,08008	0,07680	0,07364	0,07060	0,07060	0,06487	0,06217	0,05957
10	0,07238	0,06903	0,06582	0,06275	0,05980	0,05980	0,05429	0,05171	0,04925
11	0,06336	0,06008	0,05695	0,05396	0,05112	0,05112	0,04584	0,04339	0,04107
12	0,05590	0,05270	0,04965	0,04676	0,04403	0,04403	0,03899	0,03667	0,03448
13	0,04965	0,04652	0,04357	0,04078	0,03815	0,03815	0,03335	0,03116	0,02911
14	0,04434	0,04130	0,03843	0,03575	0,03323	0,03323	0,02867	0,02661	0,02469
15	0,03979	0,03683	0,03406	0,03147	0,02907	0,02907	0,02474	0,02281	0,02102
16	0,03586	0,03298	0,03030	0,02782	0,02552	0,02339	0,02143	0,01962	0,01795
17	0,03243	0,02963	0,02705	0,02466	0,02247	0,02046	0,01861	0,01462	0,01537
18	0,02341	0,02670	0,02421	0,02193	0,01984	0,01794	0,01620	0,01266	0,01319
19	0,02675	0,02195	0,02173	0,01955	0,01756	0,01576	0,01413	0,1099	0,01134
20	0,02439	0,02185	0,01955	0,01746	0,01558	0,01388	0,01235	0,00954	0,00976

Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,46296	0,46083	0,45872	0,45662	0,45455	0,45249	0,45045	0,44843	0,44643
3	0,28526	0,28257	0,27992	0,27731	0,27473	0,27218	0,26966	0,26717	0,26472
4	0,19738	019453	0,19174	0,18899	0,18629	0,18363	0,18102	0,17845	0,17593
5	0,14541	0,14256	0,13978	0,13705	0,13438	0,13177	0,12921	0,12670	0,12425
6	0,11139	0,10861	0,10591	0,10327	0,10071	0,09820	0,09576	0,09339	0,09107
7	0,08761	0,08495	0,08236	0,07985	0,07742	0,07507	0,07278	0,07057	0,06842
8	0,07022	0,06769	0,06524	0,06289	0,06061	0,05841	0,05630	0,05426	0,05229
9	0,05708	0,05469	0,05239	0,05019	0,04808	0,04605	0,04411	0,04225	0,04047
10	0,04690	0,04466	0,04251	0,04047	0,03852	0,03667	0,03489	0,03321	0,03160
11	0,03886	0,03676	0,03478	0,03289	0,03110	0,02941	0,02781	0,02629	0,02485
12	0,03241	0,03047	0,02863	0,02690	0,02526	0,02373	0,02228	0,02093	0,01965
13	0,02718	0,02538	0,02369	0,02210	0,02062	0,01923	0,01794	0,01673	0,01560
14	0,02290	0,02123	0,01968	0,01823	0,01689	0,01565	0,01449	0,01342	0,01242
15	0,01936	0,01782	0,01640	0,01509	0,01388	0,01277	0,01174	0,01079	0,00992
16	0,01641	0,01500	0,01371	0,01252	0,01144	0,01044	0,00953	0,00870	0,00794
17	0,01395	0,01266	0,01149	0,01041	0,00944	0,00855	0,00775	0,00702	0,00636
18	0,01188	0,01071	0,00964	0,00868	0,00781	0,00702	0,00631	0,00568	0,00510
19	0,01014	0,00907	0,00810	0,00724	0,00646	0,00577	0,00515	0,00459	0,00410
20	0,00867	0,00769	0,00682	0,00605	0,00536	0,00474	0,00420	0,00372	0,00329

Продолжение прил. 2

Коэффициент дисконтирования аннуитета $FM5 = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,93458	0,92593	0,91743	0,90909	0,90090	0,89286	0,88496	0,87719	0,86957
2	1,80802	1,78326	1,75911	1,73554	1,71252	1,69005	1,66810	1,64666	1,62571
3	2,62432	2,57710	2,53129	2,48685	2,44371	2,40183	2,36115	2,32163	2,28323
4	3,38721	3,31213	3,23972	3,16987	3,10245	3,03735	2,97447	2,91371	2,85498
5	4,10020	3,99271	3,88965	3,79079	3,69590	3,60478	3,51723	3,43308	3,35216
6	4,76654	4,62288	4,48592	4,35526	4,23054	4,11141	3,99755	3,88867	3,78448
7	5,38929	5,20637	5,03295	4,86842	4,71220	4,56376	4,42261	4,28830	4,16042
8	5,97130	5,74664	5,53482	5,33493	5,14612	4,96764	4,79877	4,63886	4,48732
9	6,51523	6,24689	5,99525	5,75902	5,53705	5,32825	5,13166	4,94637	4,77158
10	7,02358	6,71008	6,41766	6,14457	5,88923	5,65022	5,42624	5,21612	5,01877
11	7,49867	7,13896	6,80519	6,49506	6,20652	5,93770	5,68694	5,45273	5,23371
12	7,94269	7,53608	7,16073	6,81369	6,49236	6,19437	5,91765	5,66029	5,42062
13	8,35765	7,90378	7,48690	7,10336	6,74987	6,42355	6,12181	5,84236	5,58315
14	8,74547	8,24424	7,78615	7,36669	6,98187	6,62817	6,30249	6,00207	5,72448
15	9,10791	8,55948	8,06069	7,60608	7,19087	6,81086	6,46238	6,14217	5,84737
16	9,44665	8,85137	8,31256	7,82371	7,37916	6,97399	6,60388	6,26506	5,95423
17	9,76322	9,12164	8,54363	8,02155	7,54879	7,11963	6,72909	6,37286	6,04716
18	10,0591	9,37189	8,75563	8,20141	7,70162	7,24967	6,83991	6,46742	6,12797
19	10,3356	9,60360	8,95011	8,36492	7,83929	7,36578	6,93797	6,55237	6,19823
20	10,5940	9,81815	9,12855	8,51356	7,96333	7,46944	7,02475	6,62313	6,25933

Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0,86207	0,85470	0,84746	0,84034	0,83333	0,82645	0,81967	0,81301	0,80645
2	1,60523	1,58521	1,56564	1,54650	1,52778	1,50946	1,49153	1,47399	1,45682
3	2,24589	2,20958	2,17427	2,13992	2,10648	2,07393	2,04224	2,01137	1,98130
4	2,79818	2,74324	2,69006	2,63859	2,58873	2,54044	2,49364	2,44827	2,40428
5	3,27429	3,19935	3,12717	3,05763	2,99061	2,92598	2,86364	2,80347	2,74538
6	3,68474	3,58918	3,49760	3,40978	3,32551	3,24462	3,16692	3,09225	3,02047
7	4,03857	3,92238	3,81153	3,70570	3,60459	3,50795	3,41551	3,32704	3,24232
8	4,34359	4,20716	4,07757	3,95437	3,83716	3,72558	3,61927	3,51792	3,42122
9	4,60654	4,45057	4,30302	4,16333	4,03097	3,90543	3,78628	3,67310	3,56550
10	4.83323	4,65860	4,49409	4,33893	4,19247	4,05408	3,92318	3,79927	3,68186
11	5,02864	4,83641	4,65601	4,48650	4,32706	4,17692	4,03540	3,90185	3,77569
12	5,19711	4,98839	4,79322	4,61050	4,43922	4,27845	4,12737	3,98524	3,85136
13	5,34233	5,11828	4,90951	4,71471	4,53268	4,36236	4,20277	4,05304	3,91239
14	5,46753	5,22930	5,00806	4,80228	4,61057	4,43170	4,26456	4,10816	3,96160
15	5,57546	5,32419	5,09158	4,87586	4,67547	4,48901	4,31522	4,15298	4,00129
16	5,6685	5,40529	5,16235	4,93770	4,72956	4,53637	4,35673	4,18914	4,03330
17	5,7487	5,47461	5,22233	4,98966	4,07746	4,57551	4,39077	4,21904	4,05911
18	5,8189	5,53385	5,27316	5,03333	4,81219	4,60786	4,41866	4,24312	4,07993
19	5,8775	5,58449	5,31624	8,07003	4,84350	4,63460	4,44152	4,26270	4,09672
20	5,9289	5,62777	5,35275	5,10086	4,86958	4,65669	4,46027	4,27862	4,11026

Окончание прил. 2

Взнос на амортизацию единицы $FM6 = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

Год	Ставка, %								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000	1,11000	1,12000	1,13000	1,14000	1,15000
2	0,55309	0,56077	0,56847	0,57619	0,58393	0,59170	0,59948	0,60729	0,61512
3	0,38105	0,38803	0,39505	0,40211	0,40921	0,41635	0,42352	043073	0,43798
4	0,29523	0,30192	0,30867	0,31547	0,32233	0,32923	0,33619	0,34320	0,35027
5	0,24389	0,25046	0,25709	0,26380	0,27057	0,27741	0,28431	0,29128	0,29832
6	0,20980	0,21632	0,22292	0,22961	0,23638	0,24323	0,25015	0,25716	0,26424
7	0,18555	0,19207	0,19869	0,20541	0,21222	0,21912	0,22611	0,23319	0,24036
8	0,16747	0,17401	0,18067	0,18744	0,19432	0,20130	0,20839	0,21557	0,22285
9	0,15349	0,16008	0,16680	0,17364	0,18060	0,18768	0,19487	0,20217	0,20957
10	0,14238	0,14903	0,15582	0,16275	0,16980	0,17698	0,18429	0,19171	0,19925
11	0,13336	0,14008	0,14695	0,15396	0,16112	0,16842	0,17584	0,18339	0,19107
12	0,12590	0,13270	0,13965	0,14676	0,15403	0,16144	0,16899	0,17667	0,18448
13	0,11965	0,12652	0,13357	0,14078	0,14815	0,15568	0,16335	0,17116	0,17911
14	0,11434	0,12130	0,12843	0,13575	0,14323	0,15087	0,15867	0,16661	0,17469
15	0,10979	0,11683	0,12406	0,13147	0,13907	0,14682	0,15474	0,16281	0,17102
16	0,10586	0,11298	0,12030	0,12782	0,13552	0,14339	0,15143	0,15962	0,16795
17	0,10243	0,10963	0,11705	0,12466	0,13247	0,14046	0,14861	0,15692	0,16537
18	0,09941	0,10670	0,11421	0,12193	0,12984	0,13794	0,14620	0,15462	0,16319
19	0,09675	0,10413	0,11173	0,11955	0,12756	0,13576	0,14413	0,15266	0,16134
20	0,94393	0,10185	0,10955	0,11746	0,12558	0,13388	0,14235	0,15099	0,15976
Год	Ставка, %								
	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1,16000	1,17000	1,18000	1,19000	1,20000	1,21000	1,22000	1,23000	1,24000
2	0,62296	0,63083	0,63872	0,64662	0,65455	0,66249	0,67045	0,67843	0,68643
3	0,44526	0,45257	0,45992	0,46731	0,47473	0,448218	0,48966	0,49717	0,50472
4	0,35738	0,36453	0,37174	0,37899	0,38629	0,39363	0,40102	0,40845	0,41593
5	0,30541	0,31256	0,31978	0,32705	0,33438	0,34177	0,34921	0,35670	0,36425
6	0,27139	0,27861	0,28591	0,29327	0,30071	0,30820	0,31576	0,32339	0,33107
7	0,24761	0,25495	0,26236	0,26985	0,27742	0,28507	0,29278	0,30057	0,30842
8	0,23022	0,23769	0,24524	0,25289	0,26061	0,26841	0,27630	0,28426	0,29229
9	0,21708	0,22469	0,23239	0,24019	0,24808	0,25605	0,26411	0,27225	0,28047
10	0,20690	0,21466	0,22251	0,23047	0,23852	0,24667	0,25489	0,26321	0,27160
11	0,19886	0,20676	0,21478	0,22289	0,23110	0,23941	0,24781	0,25629	0,26485
12	0,19241	0,20047	0,20863	0,21690	0,22526	0,23373	0,24228	0,25093	0,25965
13	0,18718	0,19538	0,20369	0,21210	0,22062	0,22923	0,23794	0,24673	0,25560
14	0,18290	0,19123	0,19968	0,20823	0,21689	0,22565	0,23449	0,24342	0,25242
15	0,17936	0,18782	0,19640	0,20509	0,21388	0,22277	0,23174	0,24079	0,24992
16	0,17641	0,18500	0,19371	0,20252	0,21144	0,22044	0,22953	0,23870	0,24794
17	0,17395	0,18266	0,19149	0,20041	0,20944	0,21855	0,22775	0,23702	0,24636
18	0,17188	0,18071	0,16964	0,19868	0,20781	0,21702	0,22631	0,23568	0,24510
19	0,17014	0,17907	0,18810	0,19724	0,20646	0,21577	0,22515	0,23459	0,24410
20	0,16867	0,17769	0,18682	0,19505	0,20536	0,21474	0,22420	0,23372	0,24329

Приложение 3

ФУНКЦИИ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Задача	***Прямая функция***	***Обратная функция***	***Задача***
Определение наращенной суммы вложенного капитала (задача наращения) $FV = PV \cdot FM1$	Коэффициент наращения, множитель наращения, будущая стоимость единичного вложения $FM1 = (1+i)^n$	Коэффициент дисконтирования, дисконтный множитель, дисконт-фактор, текущая стоимость единичного вложения $FM2 = \frac{1}{(1+i)^n}$	Определение текущей стоимости будущих поступлений (задача дисконтирования) $PV = FV \cdot FM2$
Расчет размера фонда накопления $FVA = PMT \cdot FM3$	Коэффициент наращения аннуитета, будущая стоимость единичного вложения за период, коэффициент аккумуляции вкладов $FM3 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	Фактор фонда возмещения $FM4 = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$	Расчет годовых аннуитетных платежей по размеру фонда накопления $PMT = FVA \cdot FM4$
Определение размера кредита при его амортизации аннуитетными платежами $PVA = PMT \cdot FM5$	Коэффициент дисконтирования аннуитета, коэффициент приведения годового аннуитета, текущая стоимость единичного вложения за период $FM5 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	Взнос на амортизацию единицы $FM6 = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	Расчет годовых аннуитетных выплат по размеру кредита $PMT = PVA \cdot FM6$